



FREIBURG ADVANCED CENTER OF EDUCATION (FACE) - ein Kooperationsnetzwerk der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg und der Pädagogischen Hochschule Freiburg



20.10.2016

Was bietet die Unterrichts- und Schulforschung für einen qualitätsvollen Umgang mit Heterogenität?

Prof. Dr. Thorsten Bohl

Eberhard Karls Universität Tübingen, Direktor der Tübingen School of Education (TüSE)

03.11.2016

Kompetenzorientiertes Unterrichten – Was heißt das aus Sicht der Lehr-Lern-Forschung?

Prof. Dr. Jörg Wittwer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Institut für Erziehungswissenschaft

17.11.2016

Flexibel differenzieren und fokussiert fördern – Differenzierungsstrategien unterscheiden und auswählen

Prof. Dr. Timo Leuders

Pädagogische Hochschule Freiburg, Institut für Mathematische Bildung



Warum das Thema „Heterogenität“ heute?

- kein neues Thema „innere Differenzierung“
z. B. bei Klafki & Stöcker (1976)

(70er vs. heute: vgl. Trautmann & Wischer 2008)

- Veränderungen der Schulstruktur,
bildungspolitischer Wille
- Spürbareres Bedürfnis aus der
Unterrichtspraxis



Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung

(Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.2008 i. d. F. vom 11.06.2015)¹

Die Studienabsolventinnen und -absolventen verfügen über anschlussfähiges mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen, das es ihnen ermöglicht, gezielt Lern- und Bildungsprozesse im Fach Mathematik zu gestalten und neue fachliche und fächerverbindende Entwicklungen selbstständig in den Unterricht und in die Schulentwicklung einzubringen. Sie

- können differenzierenden Mathematikunterricht auf der Basis fachdidaktischer Konzepte analysieren und planen sowie auf der Grundlage erster reflektierter Erfahrungen exemplarisch durchführen,

Mathematikdidaktik

- Themenfelder und Standards des Mathematikunterrichts
- Mathematikbezogene Lehr-Lern-Forschung (z. B. Motivation, individuelle Vorstellungen und Fehler der Schülerinnen und Schüler, Dispositionen, typische Verläufe und Hürden in Lernprozessen, Aufbau und Wirkungen von Lernumgebungen)
- Fachdidaktische Diagnoseansätze, Lernstandbestimmung und darauf basierende Förderkonzepte
- Planung und Analyse differenzierenden Mathematikunterrichts,
- Formen der Kooperation mit sonderpädagogisch qualifizierten Lehrkräften und sonstigem pädagogischen Personal bei der Planung, Durchführung und diagnostischen Reflexion inklusiven Unterrichts



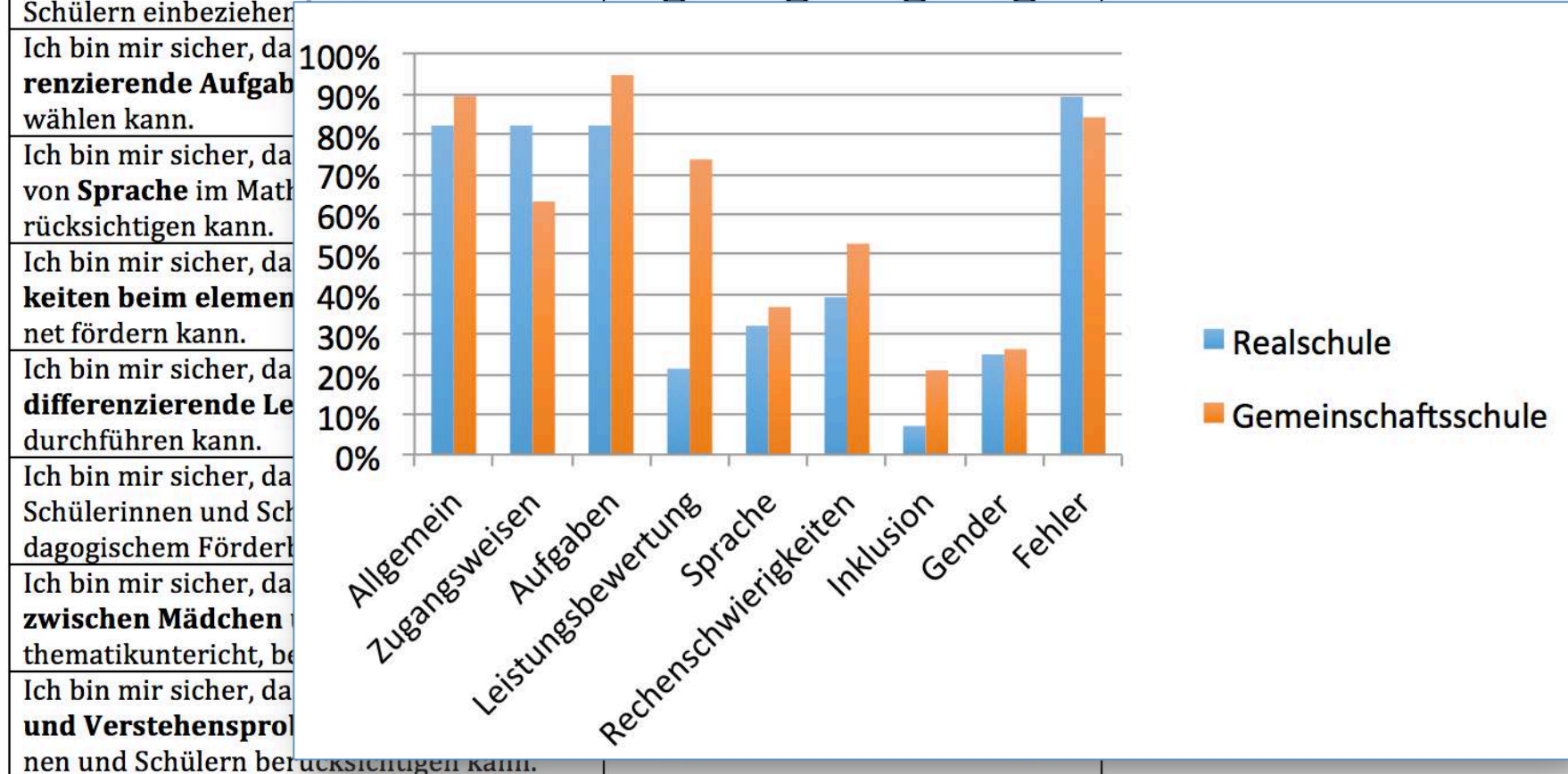
Die subjektive Sicht....

Themenbereich	Teilnahme		Fortbildungsbedarf	
	N	Anteil ¹ in %	N	Anteil ² in %
Fachdidaktische Themen	1744	44.2	1654	37.1
Unterrichtsformen und -methoden (fächerübergreifend)	1744	26.8	1675	44.9
Leistungsdiagnostik und -beurteilung	1744	17.7	1675	52.8
Förderung von lernschwachen Schülerinnen und Schülern	1744	17.5	1695	69.4
Nutzung von Medien im Unterricht	1744	17.4	1677	36.0
Curricula (Lehrpläne, Rahmenpläne)	1744	16.7	1663	19.8
Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz	1744	16.0	1649	26.0
Fachliche Themen ohne Bezug zum Unterricht	1744	15.1	1647	9.5
Schulorganisation / Schulentwicklung	1744	14.4	1651	24.2
Gewaltprävention	1744	13.9	1680	38.9
Binnendifferenzierung / individuelle Förderung	1744	13.9	1670	61.5
Umgang mit Störungen im Unterricht	1744	12.1	1691	41.3
Beratung von Eltern oder Schülerinnen und Schülern	1744	10.6	1677	31.7
Leseförderung	1744	10.4	1668	36.1
Integration / Inklusion von Schülerinnen und Schülern mit sonderpäd. Förderbedarf	1744	9.5	1681	68.0
Sprachförderung	1744	8.9	1668	45.7
Jahrgangsübergreifendes Lernen	1744	7.1	1677	44.8
Ganztagsangebote	1744	2.3	1648	19.8
Interkulturelle Pädagogik	1744	1.6	1659	24.8
Andere	1744	27.4	–	–



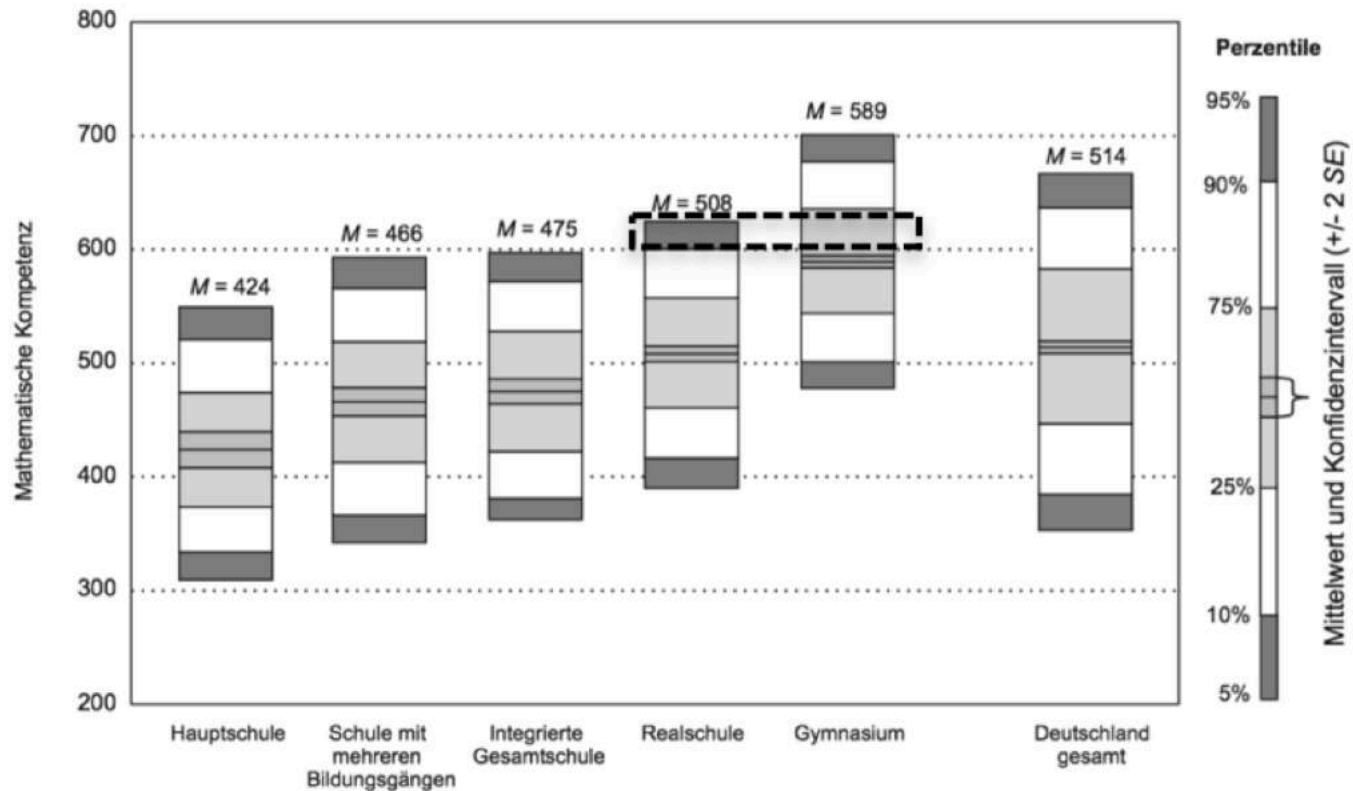
Erhebung an Sek-1-Schulen im Schulamt Konstanz (N=62 Lehrkräfte) (Leuders, ersch. 2017)

Ich bin mir sicher, dass ich einen differenzierenden Unterricht gestalten kann.	stimme nicht zu ☐	stimme wenig zu ☐	stimme eher zu ☐	stimme voll zu ☐
Ich bin mir sicher, dass ich verschiedene Zugangsweisen bei Schülerinnen und Schülern einbeziehen	stimme nicht zu ☐	stimme wenig zu ☐	stimme eher zu ☐	stimme voll zu ☐

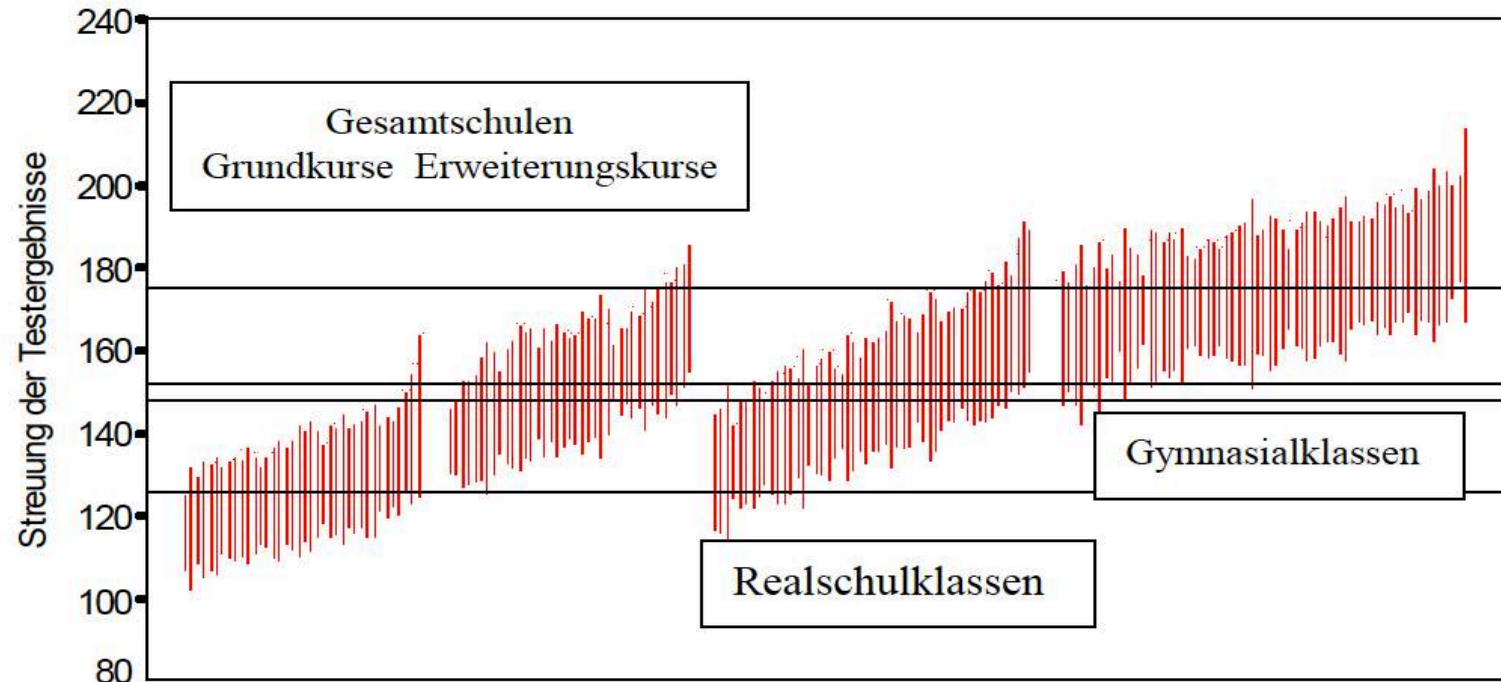




Die objektive Sicht...



(Sälzer et al. 2013, 87)



Klassen/Kurse nach Schul-/Kursform und durchschnittlichem Testergebnis

QUASUM-Studie Klasse 9 (Lehmann et al. 2000, 62)

- keine Aussage über Ursachen
- keine Aussagen über Profile
- wenig Aussagen über Heterogenität jenseits von Leistung



Die aktuelle Praxis

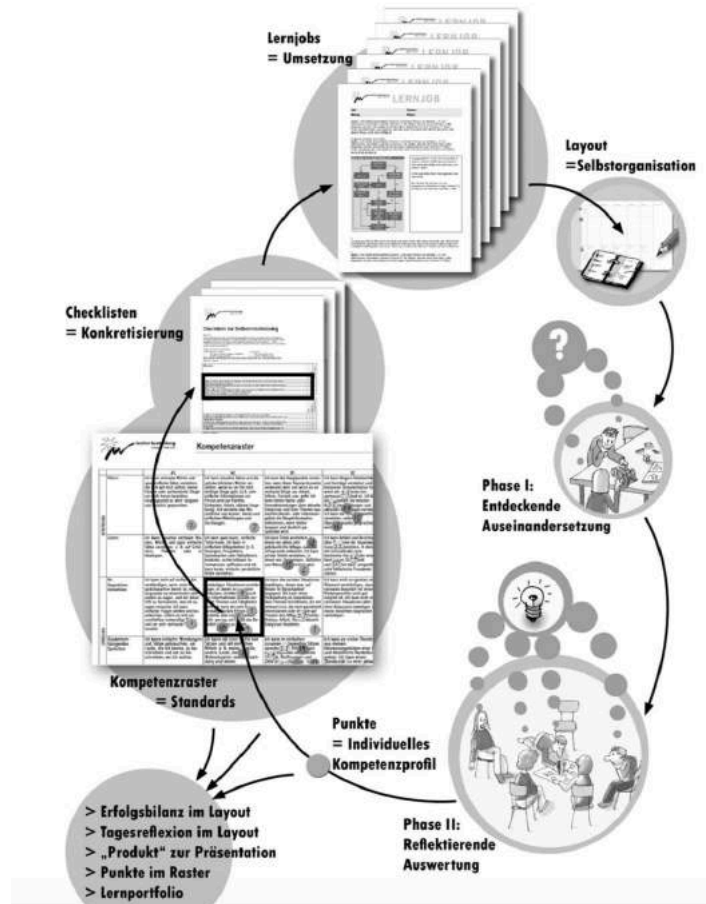
- kaum Ausbau differenzierenden Unterrichts seit den 70 Jahren
- bislang kaum systematischen Ausbildungs-/ Fortbildungskonzepte/ Ressourcen
- Reformprojekte & Individualisierungsmodelle („Gemeinschaftsschule“)

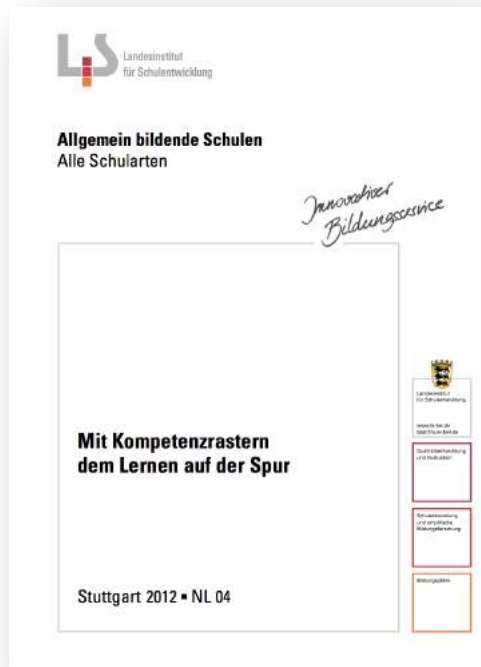


Reformmodelle „Individualisierung“

LernJobs – Teil eines Wirkungskreises

Lernpläne
Checklisten
Kompetenzraster
Lernweglisten





(Landesinstitut für Schulentwicklung, 2012)

4 Messen Ich kann sicher mit Größenangaben umgehen und Größen (insbesondere Winkel und Flächeninhalte) schätzen, messen und berechnen.	Ich kann mit Maßsystemen umgehen und Längen, Massen und Zeitspannen schätzen.	Ich kann Größen messen und mit Messergebnissen umgehen.	Ich kann Maßangaben in andere Maßeinheiten umwandeln und mit Größen rechnen.	Ich kann Winkel messen, schätzen, bezeichnen und zeichnen.	Ich kann Umfang und Flächeninhalt von einfachen ebenen Figuren berechnen und mit Flächenmaßen umgehen.	Ich kann Raum- und Oberflächen von Quaderkörpern und mit Volumenmaßen umgehen.
5 Raum und Form Ich kann mit grundlegenden geometrischen Objekten umgehen, sie darstellen, abbilden und zur Lösung von Problemen einsetzen.	Ich kann geometrische Objekte fachgerecht benennen und unterscheiden.	Ich kann geometrische Objekte anhand ihrer Eigenschaften beschreiben und erklären, in welcher Beziehung sie zueinander stehen.	Ich kann ebene Figuren und zueinander parallele und orthogonale Geraden zeichnen.	Ich kann Körpernetze erkennen und entwerfen sowie Modelle von Körpern erstellen.	Ich kann Schrägbilder von Körpern anfertigen.	Ich kann symmetrische Figuren erkennen, Symmetrien beschreiben und symmetrisch erzeugen.



Fach Mathematik	Kompetenzbereich / Leitidee 4 – Messen	Lernfortschritt LFS 6	Lernwegeliste M4.06
----------------------------------	---	--	--------------------------------------

Kompetenz Ich kann Rauminhalt und Oberflächeninhalt von Quadern berechnen und mit Volumenmaßen umgehen.	Was du schon können solltest: - Du kannst mit Längenangaben umgehen (M4.03). - Du kannst mit Dezimalzahlen rechnen (M2.04). - Du kannst geometrische Objekte erkennen (M5.01). - Du kennst Eigenschaften geometrischer Körper (M5.02). - Du kennst den Flächeninhalt ebener Figuren (M4.05). - Du kannst mit Längenangaben/Maßeinheiten umgehen. - Du kannst mit Größen rechnen (M4.03).
A: Ich kann das Volumen von Körpern durch Ausfüllen bestimmen und das Volumen von Quadern mithilfe der Formel berechnen. Ich kann Volumenmaße in benachbarte Einheiten umwandeln.	
B: Ich kann den Oberflächeninhalt von Quadern berechnen und durch Messen und Berechnen den Oberflächeninhalt und das Volumen von quaderförmigen Gegenständen aus meiner Umwelt ermitteln.	Wofür du das brauchst: - Verschiedene Anwendungen im Alltag wie Materialbedarf beim Basteln, beim Renovieren oder beim Verpacken von Geschenken, Ladevolumen von Fahrzeugen, Füllstand von Behältern, wie viel Luft im Klassenzimmer ist und wie viel Wasser in ein Schwimmbad passt...
C: Ich kann Volumenmaße sinnvoll umwandeln und den Oberflächeninhalt und das Volumen von zusammengesetzten Körpern berechnen.	Wie du dein Können prüfen kannst: - Testaufgaben

Was du hier lernen kannst:			Lernmaterialien LernSchritte, LernThemen und LernProjekte	Ergänzungen
01	Ich kann das Volumen von Körpern durch Ausfüllen bestimmen.		01 Wasser marsch! LT	A
02	Ich kann das Volumen von Quadern berechnen.		01 Wasser marsch! LT 03 Die Welt im Container LT	A A-B
03	Ich kann Raum- und Hohlmaße in benachbarte Einheiten umwandeln.			
04	Ich kann den Oberflächeninhalt von Quadern ermitteln.		02 Aufbewahrungsboxen basteln LP 03 Die Welt im Container LT	A-C A-B
05	Ich kann den Oberflächeninhalt von quaderförmigen Gegenständen aus meiner Umwelt durch Messen und Berechnen ermitteln.			



Kompetenzbereich/ Leitidee 4 Messen	Lern- fortschritt LFS 6	Materialien/ Titel 01 Wasser marsch!
Ich kann Rauminhalt und Oberflächeninhalt von Quadern berechnen und mit Volumenmaßen umgehen.		
Ich kann das Volumen von Körpern durch Ausfüllen bestimmen. Ich kann das Volumen von Quadern berechnen.		

Mathematik M4.06.01

LernPROJEKT

LernTHEMA

LernSCHRITT

Volumen schätzen und berechnen

Vorbereitung:

Du benötigst verschiedene quaderförmige Gefäße aus Glas oder Kunststoff, die oben offen sind, einen Messbecher und ein Lineal oder einen Meterstab. Ein Waschbecken sollte in der Nähe deines Arbeitsplatzes sein.



Das Volumen eines Quaders berechnest du mit der Formel

$$V = l \cdot b \cdot h$$

("Länge mal Breite mal Höhe")

1. Lege eine Tabelle mit vier Spalten an, in die du anschließend zu jedem Gefäß das geschätzte, das gemessene und das berechnete Volumen eintragen kannst.



Flexibel Differenzieren und **fokussiert** fördern



- Was braucht eine Lehrkraft um im Alltag handlungsfähig zu sein?
- Was sind hilfreiche Professionalisierungsformen?
- Welche Rolle spielt das spezifische Fach?



Gliederung

- **Forschungsstand:** Heterogenitätsaspekte
- **Fokussiert fördern:** ... und passende Differenzierungsformen („top down“)
- **Flexibel differenzieren:** Eine Theorie für die Praxis („bottom up“)
- **Erfahrungen aus der Fortbildung**



Forschungsstand

- Leistungsunterschiede *zwischen* Schulformen
- Leistungsunterschiede *innerhalb* von Klassen
- Einfluss von Leistungsunterschieden auf Lernzuwächse:

Keine Nachteile für Stärkere in heterogenen Klassen

(Boaler, 2014)

Größere mittlere Lernzuwächse in heterogenen Klassen

(Scharenberg, 2012)



Forschungsstand

- Merkmale der **Leistungsschwächsten** („Risikogruppe“)

PISA: Mathematikverständnis, das den Anforderungen der letzten Grundschulklasse entspricht.“ (Sälzer et al. 2013, 73)

ABER:

Fachdidaktik: Lücken in zentralen Inhalten der Grundschulmathematik: Stellenwertverständnis, Operationsverständnis, Umgang mit Sachaufgaben (Moser-Opitz 2007; Humbach 2008)



Forschungsstand

- Merkmale der **Leistungsstärksten**

Begabung = Bündel von Fähigkeiten, die in unterschiedlichen Ausprägungen bei *allen* Lernenden vorliegen

- *Akzeleration*

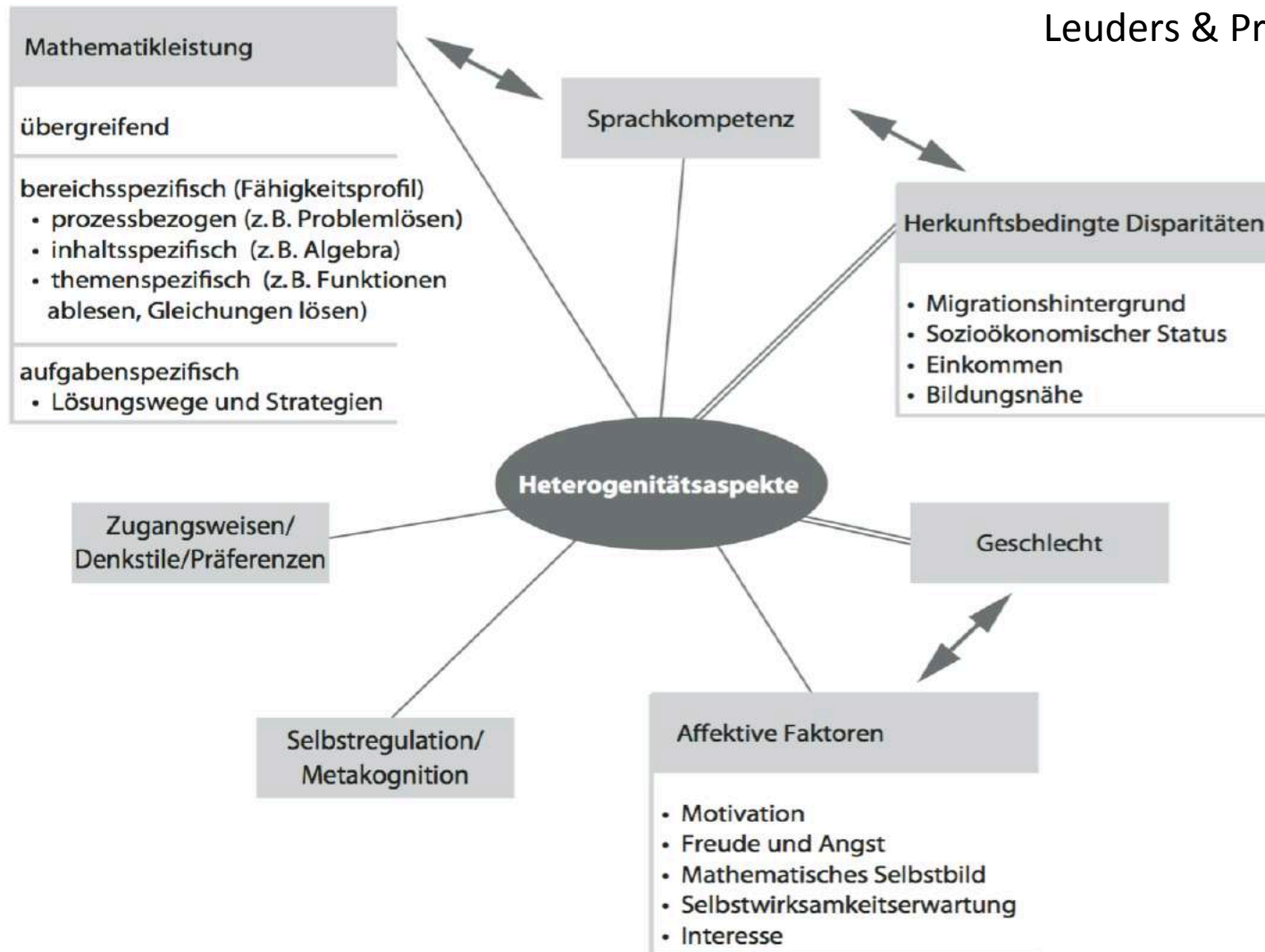
- *Enrichment*

- integrierte Förderung im Rahmen des regulären Unterrichts (Sheffield, 2003)



Jenseits von Leistungsunterschieden

Leuders & Prediger (2016)





Gliederung

- **Forschungsstand:** Heterogenitätsaspekte
- **Fokussiert fördern:** ... und passende Differenzierungsformen („top down“)
- **Flexibel differenzieren:** Eine Theorie für die Praxis („bottom up“)
- **Erfahrungen aus der Fortbildung**



Prinzip der fokussierten Förderung

Eine **fokussierte Förderung** lässt sich nicht allein über methodische Individualisierung oder individuelle Zuwendung herstellen, sondern muss zwei zentrale Kriterien erfüllen:

- Individuelle **Adaptivität**: Wie gut ist die Förderung der zentralen Förderinhalte auf die individuellen Lernbedarfe der Einzelnen abgestimmt?
- Inhaltliche **Treffericherheit**: Welche Förderinhalte sind gemäß der fachdidaktisch-empirischen Forschung zentral, um die Hürden zu überwinden?

Leuders & Prediger (2016)



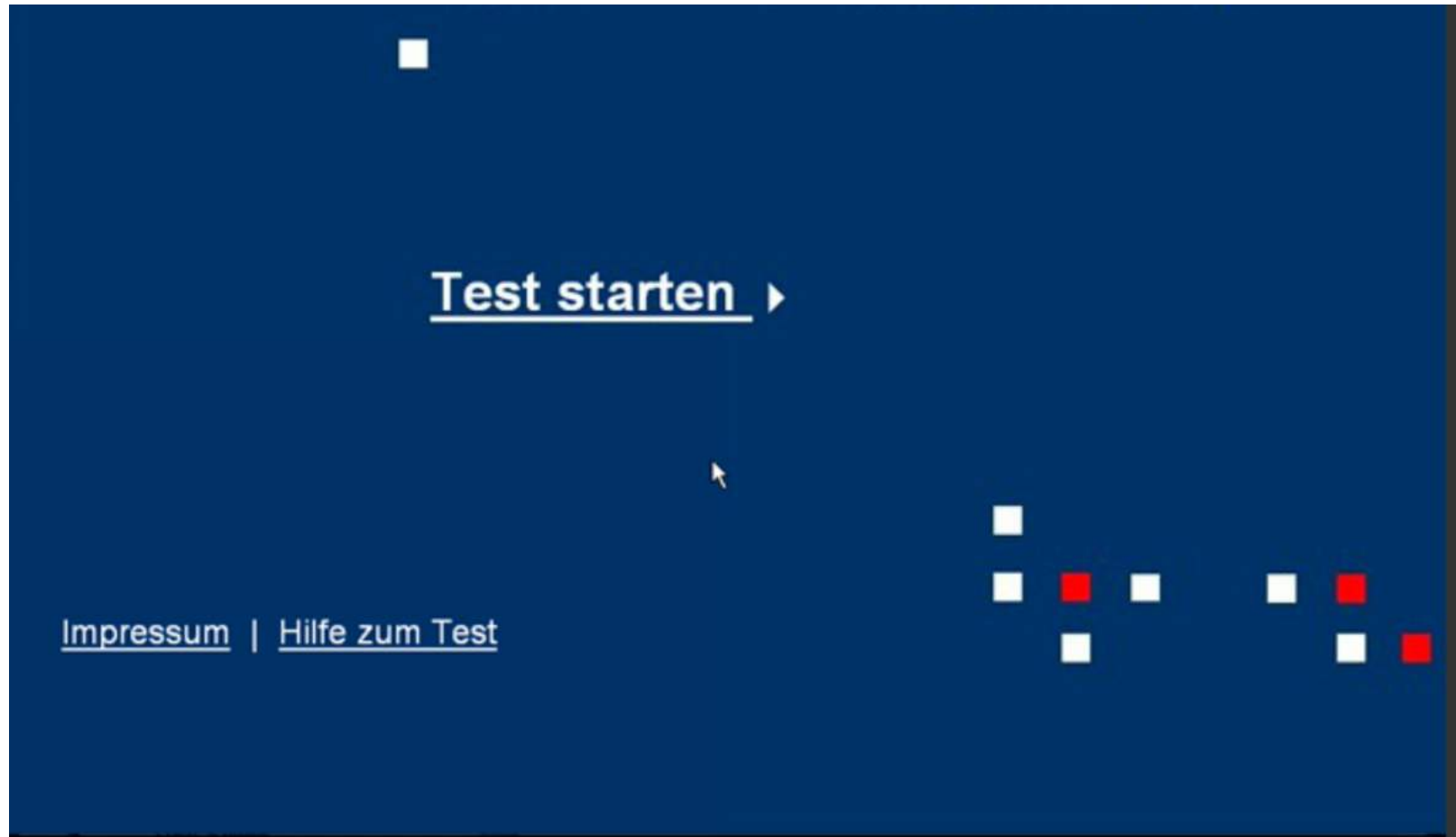
Fokussiert fördern

Bei

- **Verstehenshürden**
- affektiven Hürden
- sprachlich bedingten Hürden
- genderbedingten Unterschieden
- sonderpädagogischen Förderbedarfen



Ein problematisches Beispiel





Fokussierte Förderung bei fehlenden Verstehensgrundlagen



„Mit Luca üben wir an den Hausaufgaben jeden Tag mindestens zwei Stunden, manchmal kann er es auch ein bisschen, aber so richtig kapiert er es nie. Zum Glück fragt ihn in Klasse 6 keiner mehr, ob 123 456 größer ist oder 8 944, das wüsste er nämlich nicht.“



Was können Eltern überhaupt tun?



1

Mathe können? Mathe können!

Wozu dieses Buch?	8
Was man tun kann und was man lassen sollte	12
Kompetenzen, Bildungsstandards und all das ...	14

2

Kompetenzen

$\frac{1}{2}$	Zahlen beherrschen	Einblick	24
		Durchblick	28
		Ausblick	38
	Raum und Form erfassen	Einblick	44
		Durchblick	46
		Ausblick	56

3

Über Mathe reden

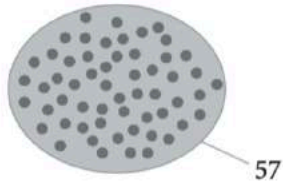
Über Mathe reden!	146
Lernen und Üben zuhause	148
Nachhilfe und Förderunterricht	162
Rechenschwäche und Hochbegabung	173

**Aufgabe 1:**

Stellenwertverständnis und Entbündeln

a) Hier sind 57 schwarze Punkte.

Wie viele „Zehnerpäckchen“ oder Zehnerbündel kannst du machen?

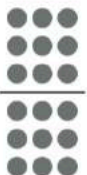
Antwort: 7

$$\begin{aligned} \text{b) } 10\,000 - 1 &= \underline{9\,000} \\ 10\,000 - 10 &= \underline{9\,990} \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Grundvorstellungen zur Multiplikation

a)

Schreibe eine Malaufgabe zu dem Bild.
Schreibe auch das Ergebnis dazu.

$$\underline{9 \cdot 9 = 81}$$

b) Finde eine Rechengeschichte zur Aufgabe
 $6 \cdot 3 = 18$.

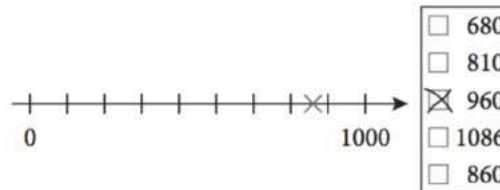
Tina kauft sich 6 Zeitschriften.
Und am nächsten Tag 3.
Wie viel hat sie in 2 Tagen ausgegeben

Aufgabe 2:

Orientierung auf dem Zahlenstrahl

a) Welche Zahl ist am Zahlenstrahl markiert?

Kreuze die richtige Zahl im Kasten an.

**Aufgabe 4:**

Umgang mit Textaufgaben

Ein ausgewachsenes Gorilla-Männchen frisst in einer Woche etwa 210 kg Früchte und Pflanzen.

a) Wie viele kg sind das etwa an 1 Tag?

b) Wie viele kg sind das etwa in 1 Monat?

Suche dir einen Monat aus.

Schreibe auf, wie du rechnest

Pauls Lösung zu b)

$$\underline{\text{März } 210\text{ kg} + 31\text{ Tage} = 520\text{ kg}}$$

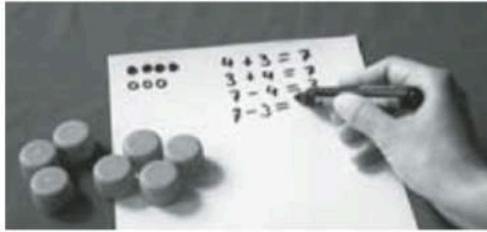
Typische
Fehler bei
fehlenden
Verstehensgrundlagen

Prediger et al.(2013)

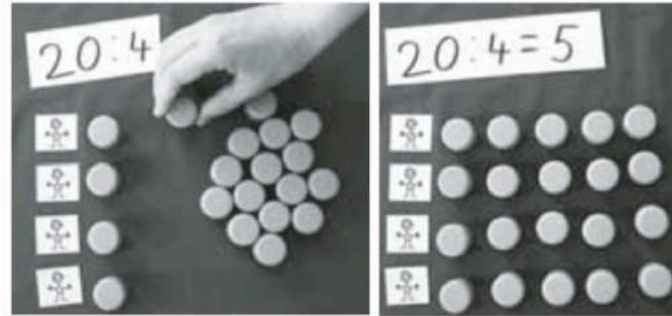


Erarbeitung der Vorstellungen:

- Beziehung zwischen Addition und Subtraktion



- Verteile 20 Deckel auf vier Kinder. Wie viel bekommt dann jeder?
- Welche Aufgabe passt dazu?



Fokussierte
Förderung von
Operations-
vorstellungen

Übung durch Darstellungsvernetzung:

- Zuordnungstreifen:



- Finde viele Mal- und Geteilt-Aufgaben zu diesen Deckeln



$$3 \cdot 5 = 15$$

$$15 : 5 = 3$$

Prediger et al.(2013)



Förderkonzept „Mathe Sicher Können“

Prediger et al. (2014)



Standortbestimmung – Baustein B4 A

16 Basiskompetenzen gliedern die Bausteine und verbinden Diagnose und Förderung.

Können Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen?

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

a) Rechne aus: $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\square}{\square}$

Rechnung:

b) Erkläre deine Rechnung mit einem Bild:

c) Rechne aus: $\frac{9}{11} - \frac{4}{11} = \frac{\square}{\square}$

Rechnung:



Die Standortbestimmungen befinden sich im hinteren Teil dieser Handreichungen als Kopiervorlage.

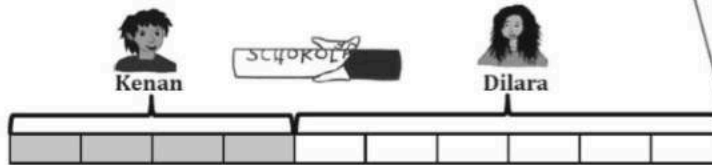


1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

1.1 Anteile und Aufgaben beim Verteilen sehen



- a) Welchen Anteil bekommt jeder? Mit welchen Plus- und Minus-Aufgaben kann man
- den ganzen Schokoriegel
 - Kenans oder Dilaras Anteil vom Schokoriegel beschreiben?



- b) Finde weitere Möglichkeiten, wie Dilara und Kenan den Schokoriegel oben teilen können. Schreibe wie in a) passende Aufgaben auf.
- c) Emily und Maurice haben auch Aufgaben geschrieben und gezeichnet:

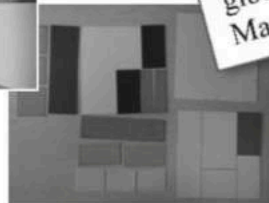
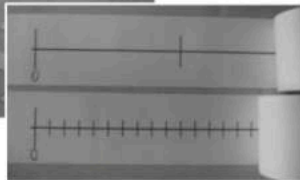
Emily:

$$\frac{5}{5} + \frac{5}{5} = \frac{10}{5}$$

Maurice:

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{10} = \frac{10}{10}$$

Förderung:
Zu jeder Diagnoseaufgabe gibt es eine passende Fördereinheit, die differenziert und gemeinsam bearbeitet wird.

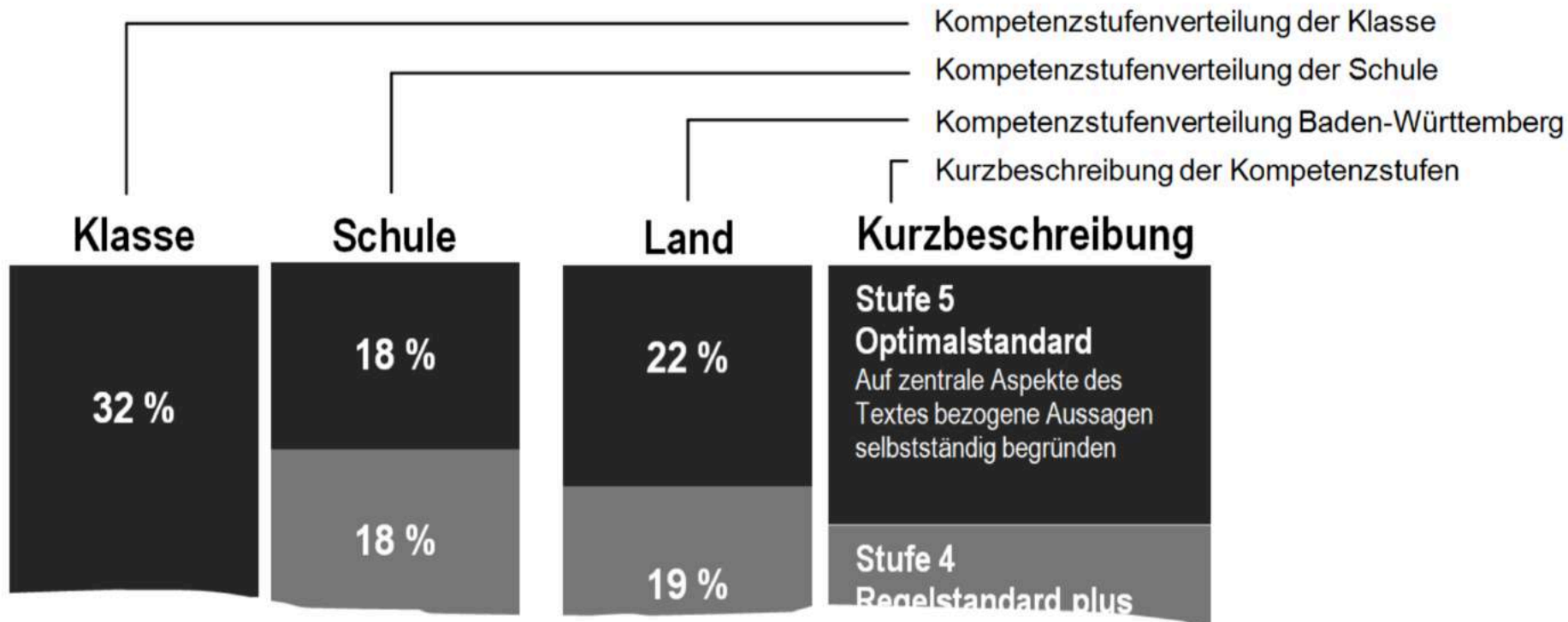


Material:
Zu vielen Förderaufgaben gibt es Material, mit dem man Mathe besser verstehen kann.



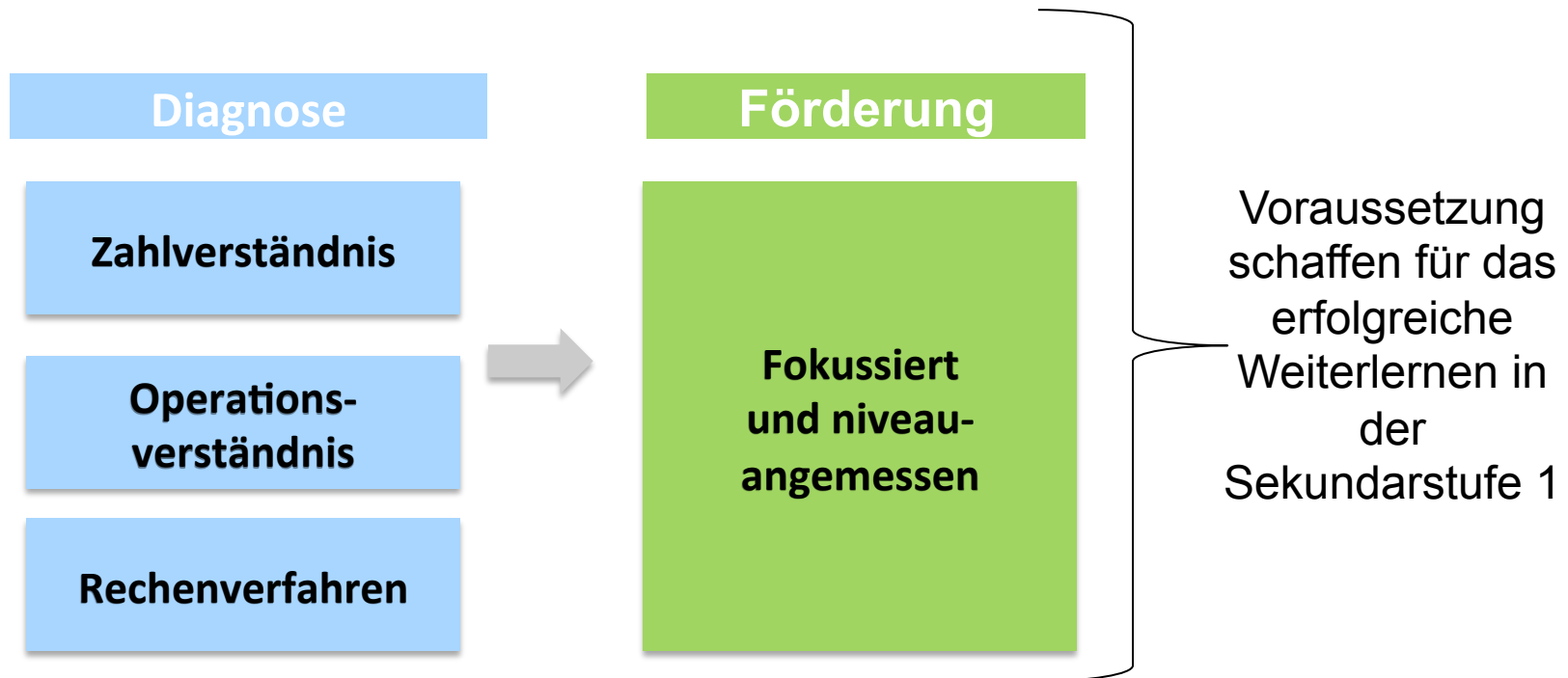
Daher: Lernstand 5 statt VERA

VERA:



Lernstand 5

= Eingangsdiaagnose am Beginn von Klasse 5



Operationsverständnis

Operations- verständnis

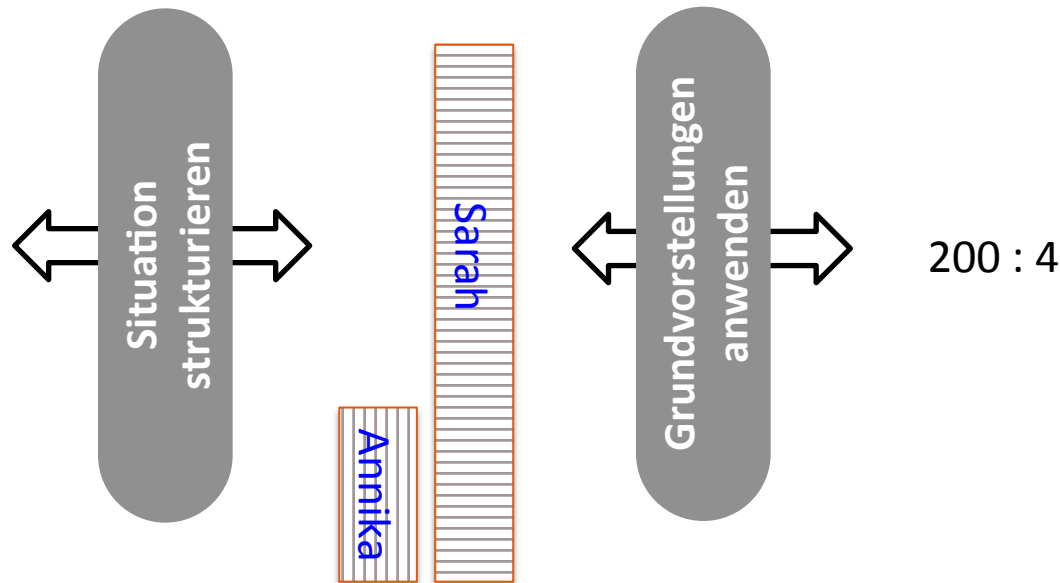
= Fähigkeit, Situationen in passende Rechenoperationen zu übersetzen und umgekehrt zu Operationen passende Situationen zu finden.

Situation

Übersetzungsprozesse

Mathematik

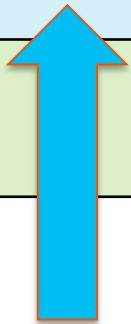
Sarah hat 200 Euro.
Sie hat 4-mal so viel
wie Annika. Wie viel
Euro hat Annika





Stufenmodell beim Operationsverständnis

Stufe	Anforderung
1a	Einfachste Operationen bei klar strukturierten Situationen verstehen
1b	Elementare Operationen verstehen
2	Verknüpfte bzw. mehrschrittige Operationen verstehen
	Operationen bei komplexen und problemhaltigen Situationen verstehen



Sarah hat 200 Euro.
Sie hat 4-mal so viel
wie Annika. Wie viel
Euro hat Annika

Klasse 6,7,8



Das Fahrrad kostet nur noch
150€, das sind $\frac{3}{4}$ (75%) des
ursprünglichen Preises.

Diagnose z.B. Operationsverständnis

Fördermodelle

Stufe	Lernstandsstufe = Ziele im Operationsverständnis	1a	1b	2	3
1a	Elementare Operationen bei leicht erfassbaren Situationen verstehen	teilweise unsicher	weitgehend unsicher	weitgehend unsicher	weitgehend unsicher
1b	Elementare Operationen verstehen	sicher	teilweise unsicher	weitgehend unsicher	weitgehend unsicher
2	Verknüpfte bzw. mehrschrittige Operationen verstehen	sicher	sicher	teilweise unsicher	weitgehend unsicher
3	Operationen bei komplexen und problemhaltigen Situationen verstehen und flexibel anwenden	sicher	sicher	sicher	teilweise unsicher

Stufe 1

Angeleitetes
Wiedererarbeiten in
Kleingruppen



Mathe-sicher-können

Stufe 2 & 3

**Diagnosegeleitetes
individuelles
Wiederholen
und Vertiefen**

Differenzierendes
Wiederholen und
Vertiefen im
Klassenunterricht

Rechenbausteine



Fördermodule
zum Operations-
verständnis





Fokussiert fördern

Bei

- **Verstehenshürden**
- affektiven Hürden
- sprachlich bedingten Hürden
- genderbedingten Unterschieden
- sonderpädagogischen Förderbedarfen



Beispiel: Zugangsweisen

Frage: Sind diese zwei Terme gleichwertig?

Term A
 $3 \cdot x + 3 \cdot 2$

Term B
 $3 \cdot (x + 2)$

Autoritative Zugangsweise:	Ja, denn das hat die Lehrerin gesagt.															
Symbolische Zugangsweise:	Gleichwertig sind zwei Terme, wenn ich sie umformen kann, das geht hier mit Distributivgesetz: $3 \cdot x + 3 = 3 \cdot (x+2)$															
Grafische Zugangsweise:	Gleichwertig sind Terme, wenn sie dasselbe Bild beschreiben, und das tun sie: 															
Verbal-situative Zugangsweise:	Gleichwertig sind Terme, wenn sie dieselbe Situation beschreiben, und das tun sie: <i>Familie Schütz kauft drei gleichgroße Fenster. Jedes Fenster kostet x Euro. Hinzu kommen noch zwei Euro pro Fenster für Verpackungsmaterial.</i> <i>Das berechne ich auf zwei Wegen ...</i>															
Numerisch-tabellarische Zugangsweise:	Gleichwertig sind Terme, wenn sie einsetzungsgleich sind, wenn also beim Einsetzen immer dieselben Werte herauskommen. (könnte stimmen) <table data-bbox="1192 941 1580 1183"><tr><th>x</th><th>$3 \cdot x + 3 \cdot 2$</th><th>$3 \cdot (x+2)$</th></tr><tr><td>1</td><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>15</td><td>15</td></tr><tr><td>5</td><td>21</td><td>21</td></tr><tr><td>...</td><td></td><td></td></tr></table>	x	$3 \cdot x + 3 \cdot 2$	$3 \cdot (x+2)$	1	7	7	3	15	15	5	21	21	...		
x	$3 \cdot x + 3 \cdot 2$	$3 \cdot (x+2)$														
1	7	7														
3	15	15														
5	21	21														
...																

(Mathewerkstatt 8, HUßMANN/LEUDERS/PREDIGER/BARZEL 2015, 103)

Aber: Differenzierung nach Denkstilen/Präferenzen durch systematische **Unterrichtsstrukturen** hat kaum Effekte für den Lernzuwachs (Pashler et al., 2008)



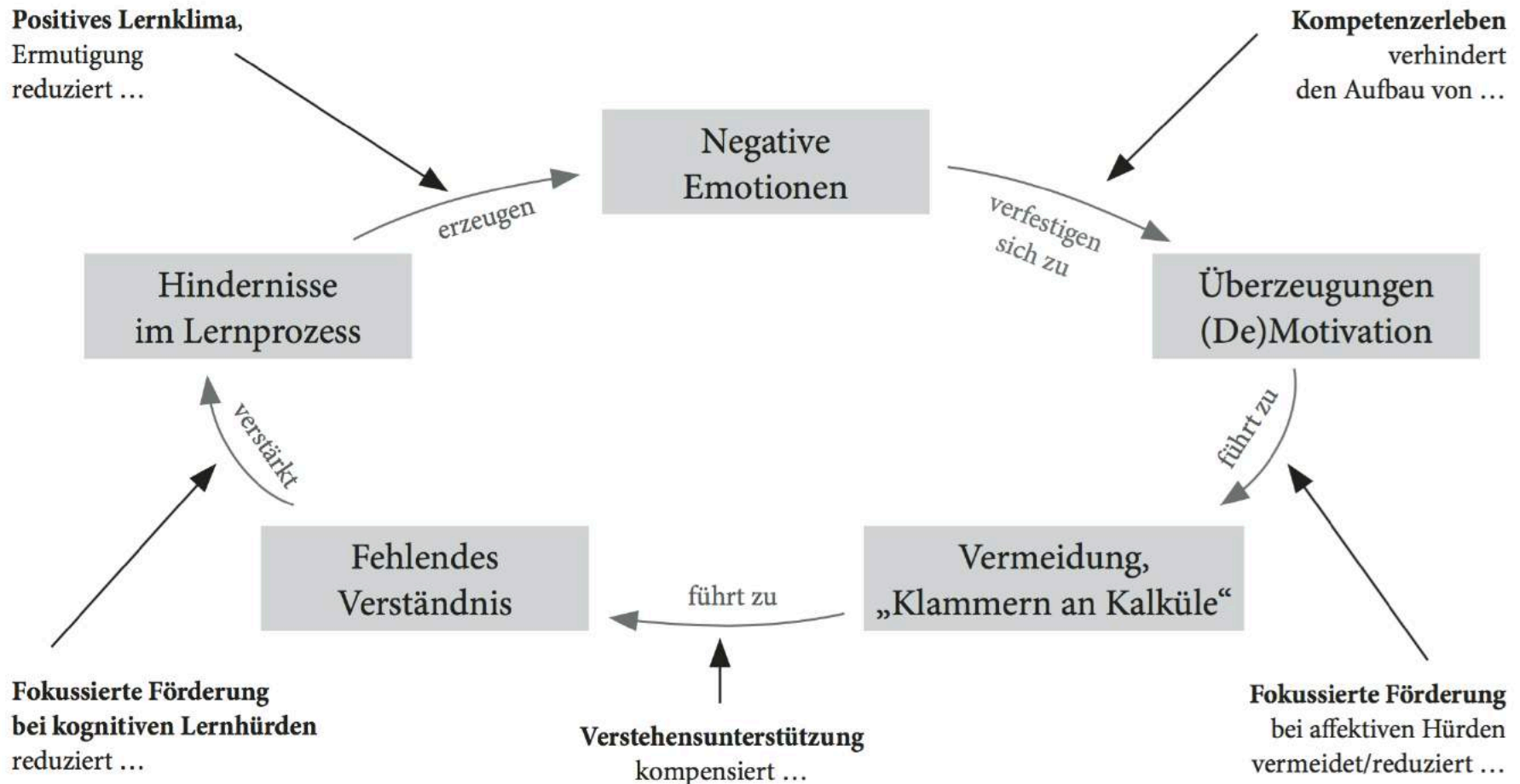
Fokussiert fördern

Bei

- **Verstehenshürden**
- affektiven Hürden
- sprachlich bedingten Hürden
- genderbedingten Unterschieden
- sonderpädagogischen Förderbedarfen



Fokussierte Förderung bei affektiven Hürden





Fokussiert fördern

Bei

- **Verstehenshürden**
- affektiven Hürden
- sprachlich bedingten Hürden
- genderbedingten Unterschieden
- sonderpädagogischen Förderbedarfen



Fokussierte Förderung bei sprachbezogenen Hürden

Sprache muss zum Lerngegenstand werden, wenn man Benachteiligungen reduzieren will (Gogolin, 2009)



ABB. 3.4 Bildungssprache als Lernvoraussetzung oder Lerngegenstand?



Eigensprachliche Ressourcen der Lernenden	• Geld, das ich zur Bank bringe • die ganze Summe • was die mir dafür geben als Gebühr • die Kosten • ...
Bedeutungsbezogener Denkwortschatz	• die Gebühr, die ich von der Bank erhalte, weil ich ihr mein Geld geliehen habe • Teil von einem Ganzen, Anteil an einem Ganzen • es ergibt sich... • Multiplizieren entspricht den Anteil nehmen • Geld, das in kleinen Etappen zurück gezahlt werden muss Prozentstreifen als grafische Darstellung $\text{Zinssatz} = \text{Anteil}$ • 4% 100%  8€ 200€ Zinsen Gesamtes = Kapital $\text{Teil} = \text{Anteil} \cdot \text{Gesamtes}$ $8€ = \frac{4}{100} \cdot 200€$
Formalbezogener Wortschatz	• $K \cdot p = Z$ • $K_n = K_{n-1} \cdot p + K_{n-1}$ • den Zins gewähren • die Zinsen zahlen • der Zinssatz als Anteil von dem Kapital • Prozentsatz von einem Grundwert ergibt den Prozentwert • monatliche Rate ergibt sich... • ...
Kontextbezogener Lesewortschatz	• zur Verfügung haben • Sparguthaben anlegen • einen Kredit aufnehmen, geben, auslösen • Finanzierungsangebot • Konto überziehen, Überziehungszinsen • Soll, Schulden • ...

Gestufter Sprachschatz
bei der Zinsrechnung
(Prediger 2016)



Gliederung

- **Forschungsstand:** Heterogenitätsaspekte
- **Fokussiert fördern:** ... und passende Differenzierungsformen („top down“)
- **Flexibel differenzieren:** Eine Theorie für die Praxis („bottom up“)
- **Erfahrungen aus der Fortbildung**



Flexibel differenzieren

„Bottom up:“

- Welche Strategien verfolgen wir schon?
- Welche Chancen/Risiken nehmen wir war?
- Welche weiteren Möglichkeiten gibt es?
- Welche weiteren Elemente können wir nutzen?

→ Dazu braucht es eine „Theoriebrille“



Analysekategorien („Theorie“)

Entscheidungsfelder für Differenzierungsansätze

Was sind die
beabsichtigten Lernziele?

Welche Voraussetzungen
hat die Lerngruppe?

Mit welchem Differenzierungs-

Ziel wird der Gleichschritt aufgelöst?

- Unterschieden gerecht werden
- Unterschiede ausgleichen
- Vielfalt zulassen und wertschätzen
- Vielfalt anregen und nutzen

Nach welchem Differenzierungs-

Aspekt wird der Gleichschritt aufgelöst?

- Lerntempo
- Anspruchsniveau
- Lerninhalte und -ziele
- Sprachliche Anforderungen
- Zugangsweisen
- Neigung, Interessen
- Arbeitsweisen
- ...

Mit welchem Differenzierungs-

Format wird Adaptivität hergestellt?

- geschlossenes Format: Lehrkraft steuert Adaptivität
- offenes Format: Lernende steuern die Adaptivität mit

Auf welcher Differenzierungs-

Ebene wird geplant?

- Ebene der Aufgaben
- Ebene der Unterrichtsmethoden
- Ebene der Unterrichtsstrukturen

Differenzierungs-
Ziele

Differenzierungs-
Aspekte

Differenzierungs-
Formate

Differenzierungs-
Ebenen

→ Anwenden auf fünf Prototypen



(1) Üben in Paralleldifferenzierung

Aufgabe 1: Berechne die Summen und Differenzen.

(1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

(2) $\frac{4}{9} + \frac{1}{3}$
 $\frac{4}{9} - \frac{1}{3}$
 $\frac{4}{9} - \frac{1}{4}$

⋮ (1) $\frac{1}{7} + \frac{1}{5}$
 $\frac{1}{6} + \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$

(2) $1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$
 $1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}$
 $1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5}$

Aufgabe 2: Welche Zahlen können hier stehen? Finde mehrere Lösungen.

(1) $\frac{\blacksquare}{\blacksquare} = 10\%$

(2) $\frac{\blacksquare}{5} = \blacksquare\%$

⋮ (1) $\frac{\blacksquare}{\blacksquare} = 16\%$

(2) $\frac{\blacksquare}{5} = \blacksquare$

(3) $\frac{\blacksquare}{\blacksquare} = 25\%$

(4) $\frac{\blacksquare}{10} = \blacksquare\%$

⋮ (3) $\frac{1}{\blacksquare} = \blacksquare\%$

(4) $\frac{3}{\blacksquare} = \blacksquare$

Material: Schulbücher + Schülerbearbeitungen



(2) Methodische Individualisierung

4 Messen Ich kann sicher mit Größengaben umgehen und Größen (insbesondere Winkel und Flächeninhalte) schätzen, messen und berechnen.	Ich kann mit Maßsystemen umgehen und Längen, Massen und Zeitspannen schätzen.	Ich kann Größen messen und mit Messergebnissen umgehen.	Ich kann Maßangaben in andere Maßeinheiten umwandeln und mit Größen rechnen.
5 Raum und Form Ich kann mit grundlegenden geometrischen Objekten umgehen, sie darstellen und zur Lösung von Problemen einsetzen.	Ich kann geometrische Körper beschreiben und darstellen.	Ich kann geometrische Körper beschreiben und darstellen.	Ich kann ebene und räumliche Figuren beschreiben und darstellen.

Material: Video + Unterrichtsmaterial

Fach Mathematik	Kompetenzbereich / Leitidee 4 – Messen	Lernfortschritt LFS 6	Lernwegeliste M4.06
----------------------------------	---	--	--------------------------------------

Kompetenz Ich kann Rauminhalt und Oberflächeninhalt von Quadern berechnen und mit Volumenmaßen umgehen.	Was du schon können solltest: - Du kannst mit Längen - Du kannst mit Dezi - Du kannst geometrische - Du kennst Eigenschaften - Du kennst den Flächeninhalt - Du kannst mit Volumenmaßen umwandeln.
A: Ich kann das Volumen von Körpern durch Ausfüllen bestimmen und das Volumen von Quadern mithilfe der Formel berechnen. Ich kann Volumenmaße in benachbarte Einheiten umwandeln.	
B: Ich kann den Oberflächeninhalt von Quadern berechnen und durch Messen und Berechnen den Oberflächeninhalt und das Volumen von quaderförmigen Gegenständen aus meiner Umwelt ermitteln.	Wofür du das brauchst: - Verschiedene Anordnungen von Quadern, beim Rechnen und Basteln, beim Rechnen und Basteln, beim Rechnen und Basteln...
C: Ich kann Volumenmaße sinnvoll umwandeln und den Oberflächeninhalt und das Volumen von zusammengesetzten Körpern berechnen.	Wie du dein Können zeigen kannst: - Testaufgaben

Kompetenzbereich / Leitidee 4 Messen	Lernfortschritt LFS 6	Materialien/ Titel 01 Wasser marsch!
Ich kann Rauminhalt und Oberflächeninhalt von Quadern berechnen und mit Volumenmaßen umgehen.		
Ich kann das Volumen von Körpern durch Ausfüllen bestimmen. Ich kann das Volumen von Quadern berechnen.		

Mathematik M4.06.01

LernPROJEKT
LernTHEMA
LernSCHRITT

Volumen schätzen und berechnen

Vorbereitung:
Du benötigst verschiedene quaderförmige Gefäße aus Glas oder Kunststoff, die oben offen sind, einen Messbecher und ein Lineal oder einen Meterstab. Ein Waschbecken sollte in der Nähe deines Arbeitsplatzes sein.



Das Volumen eines Quaders berechnest du mit der Formel

$$V = l \cdot b \cdot h$$

("Länge mal Breite mal Höhe")

Was du hier lernen kannst:		Lernmaterial LernSchritte, LernThemen
01	Ich kann das Volumen von Körpern durch Ausfüllen bestimmen.	01 Wasser marsch! L
02	Ich kann das Volumen von Quadern berechnen.	01 Wasser marsch! L 03 Die Welt im Container
03	Ich kann Raum- und Hohlmaße in benachbarte Einheiten umwandeln.	
04	Ich kann den Oberflächeninhalt von Quadern ermitteln.	02 Aufbewahrungsboxen 03 Die Welt im Container LT
05	Ich kann den Oberflächeninhalt von	

1. Lege eine Tabelle mit vier Spalten an, in die du anschließend zu jedem Gefäß das geschätzte, das gemessene und das berechnete Volumen eintragen kannst.

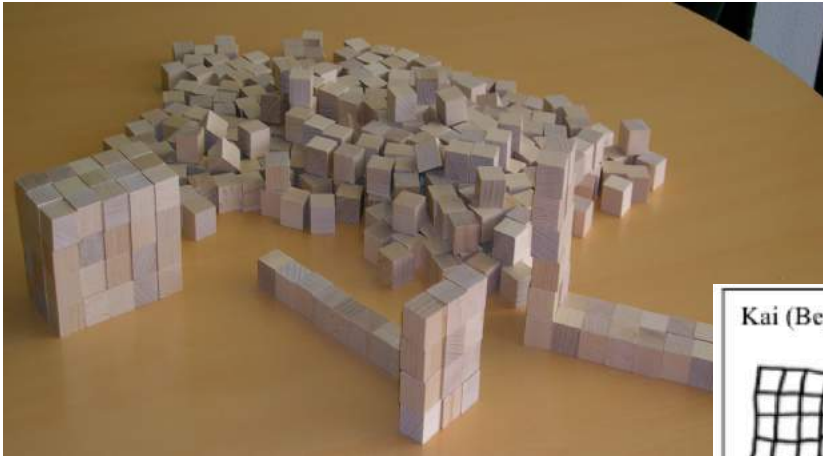
A-B	
-----	--



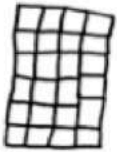
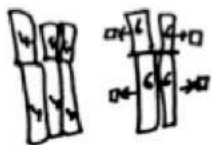
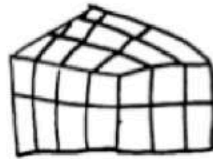
(3) Selbstdifferenzierendes Erkunden

(Kl. 6 – Erarbeitung des Volumenbegriffes)

Material: Schülerbearbeitungen + Video



Welche Quader könnt ihr damit bauen?

Kai (Beginn) 	Kai (später) $2 \cdot 12 = 24$ $4 \cdot 6 = 24$ $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ $(2 \cdot 3 \cdot 4 = 24)$ $3 \cdot 8 = 24$ $1 \cdot 24 = 24$	Hamet 	Michael 
Saskia 4 runter 6 nach links 8 runter 3 nach links 12 runter 2 nach links 24 runter 1 nach links 2 nach oben 4 nach unten 3 nach links 2 nach oben 2 nach unten 6 nach links		Sara Ein langlicher Quader. An den kurzen Seiten stehen 4 Würfel und an den länglichen Seiten stehen 6 Würfel. An den kurzen Seiten stehen 6 Würfel und an den länglichen Seiten stehen 2 Würfel. - $8 \cdot 3 = 24$ Würfel. - $1 \cdot 24 = 24$ Würfel.	



(4) Stationenbetrieb mit vielfältigen Zugangsweisen

EINSATZBEISPIEL 1: Körper erkunden (Klasse 5/6),
3 Unterrichtsstunden, (HÄGER u. a. 2007)

Körper blind ertasten:

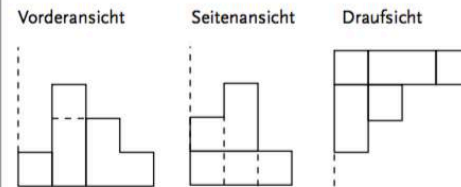
Greife in die Kiste, ohne hineinzuschauen und ertaste die Formen der Gegenstände. Benenne die Gegenstände und beschreibe ihre Eigenschaften.



STATIONENZIRKEL

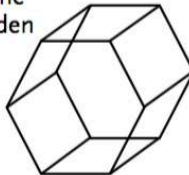
Körper finden (am PC):

Welcher Körper passt zu den folgenden Ansichten? Nutzt das Programm BauWas. Entwerft selbst Körper mit den dazugehörigen Ansichten.



Körper zeichnen:

Bastelt jeder einen Körper aus Streichhölzern. Nehmt eine Taschenlampe und lasst den Schatten der Körper auf ein Blatt fallen. Zeichnet das Bild, das auf dem Blatt entsteht.



Körper erkunden:

Baut aus den Plastikeilen verschiedene Körper. Zählt Ecken, Kanten und Flächen. Was fällt euch auf?



Material: Unterrichtsmaterial + Schülerbearbeitungen



(5) Ausgleichende Förderung im Abteilungsunterricht

B4 A – Durchführung und Auswertung der Standortbestimmung

Dauer: 20 - 25 Minuten

Hinweise zur Durchführung:

1 b): Lernende haben z.T. Schwierigkeiten, die Rechnung mit einem Bild zu erklären.

Die Aufforderung, ein Bild zu zeichnen, in dem man gleichzeitig die beiden Anteile und das Ergebnis sehen kann, kann den Lernenden über diese Schwierigkeit hinweg helfen.

Hinweise zur Auswertung:

Übergreifende Fehler

Typische Fehler	Mögliche Ursache	Förderung
1), 2) z.B. Rechne aus: (1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$ Platz für die Rechnung: $1+1=2$ $3+6=9$	Komponentenweises Addieren / Subtrahieren, das keine Beziehung zwischen Zähler und Nenner herstellt und nicht auf Vorstellungen zurückgreift. (Häufigster Fehler nach Einführung der Multiplikation.)	Bedeutung der Addition und der Subtraktion mit 1.1 - 1.3 (gleicher Nenner) bzw. 2.1 - 2.3 (ungleiche Nenner) erarbeiten. Vertiefen in 2.4.

Mathe-Sicher-Können
(Prediger Hußmann, Selter,
Nürnberg 2014)

Kann ich Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen?

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

a) Rechne aus: $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$ Rechnung: $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5+1}{8} = \frac{6}{8} (= \frac{3}{4})$

b) Erkläre deine Rechnung mit einem Bild:



c) Rechne aus: $\frac{9}{11} - \frac{4}{11} = \frac{5}{11}$ Rechnung: $\frac{9}{11} - \frac{4}{11} = \frac{9-4}{11} = \frac{5}{11}$

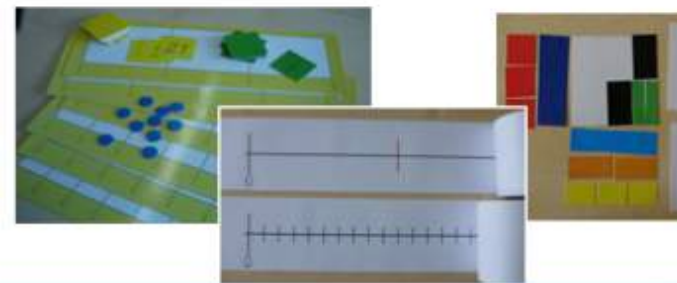


Erarbeiten (20 - 25 Minuten)

1 Anteile mit gleichen Nennern zusammenfügen und wegnehmen

1.1 Anteile und Aufgaben beim Verteilen sehen

- a) Welchen Anteil bekommt jeder? Mit welchen Plus- und Minus-Aufgaben kann man
- den ganzen Schokoriegel
 - Kenans oder Dilaras Anteil vom Schokoriegel beschreiben?



Material: Fördermaterial + Videos



(2) $\frac{4}{9} + \frac{1}{3}$
 $\frac{4}{9} - \frac{1}{3}$
 $\frac{4}{9} - \frac{1}{4}$

(1) $\frac{1}{7} + \frac{1}{5}$
 $\frac{1}{6} + \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$

(1) Üben in Paralleldifferenzierung

4 Messen Ich kann sicher mit Größenangaben umgehen und Größen (insbesondere Winkel und Flächeninhalte) schätzen, messen und berechnen.	Ich kann mit Maßsystemen umgehen und Längen, Massen und Zeitspannen schätzen.	Ich kann Größen messen und mit Messergebnissen umgehen.
5 Raum und Form Ich kann mit grundlegenden geometrischen Objekten umgehen, sie darstellen, abbilden und zur Lösung von Problemen einsetzen.	Ich kann geometrische Objekte fachgerecht benennen und unterscheiden.	Ich kann geometrische Objekte anhand ihrer Eigenschaften beschreiben und erklären, in welcher Beziehung sie zueinander stehen.

(2) Methodische Individualisierung

Kai (Beginn) Kai (später)

$2 \cdot 12 = 24$
 $4 \cdot 6 = 24$
 $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$
 $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$
 $(2 \cdot 3 \cdot 4 = 24)$
 $3 \cdot 8 = 24$
 $1 \cdot 24 = 24$

(3) Selbstdifferenzierendes Erkunden

Station 1: Konstruktion: Konstruiere die gegebenen Punkte, die vom Punkt P und der Gerade g den gleichen Abstand haben. Verbinde die Punkte.	Station 2: Parabeln im Koordinatensystem: In den folgenden Graphen sind verschiedene Parabeln dargestellt. Erstelle für jede Parabel eine Wertetabelle und suche eine Zuordnungsvorschrift. Überprüfe deine Gleichung mit dem GTR.
a) Konstruktion mit Bleistift und Geodreieck	
b) Konstruktion am Computer mit DGS	
Station 3: Parametervariation: Du findest auf dem Computer eine Small Data. Führe die angegebenen Arbeitsschritte aus. Beschreibe, was eine Veränderung der Parameter a, b und c bewirkt.	

(4) Stationenbetrieb mit vielfältigen Zugangsweisen



(5) Ausgleichende Förderung im Abteilungsunterricht

Stärken	Schwächen
Chancen	Risiken

Stärken	Schwächen
Chancen	Risiken

Stärken	Schwächen
Chancen	Risiken

Stärken	Schwächen
Chancen	Risiken

Stärken	Schwächen
Chancen	Risiken



Analysekategorien („Theorie“)

Entscheidungsfelder für Differenzierungsansätze

Was sind die
beabsichtigten Lernziele?

Welche Voraussetzungen
hat die Lerngruppe?

Mit welchem Differenzierungs-

Ziel wird der Gleichschritt aufgelöst?

- Unterschieden gerecht werden
- Unterschiede ausgleichen
- Vielfalt zulassen und wertschätzen
- Vielfalt anregen und nutzen

Nach welchem Differenzierungs-

Aspekt wird der Gleichschritt aufgelöst?

- Lerntempo
- Anspruchsniveau
- Lerninhalte und -ziele
- Sprachliche Anforderungen
- Zugangsweisen
- Neigung, Interessen
- Arbeitsweisen
- ...

Mit welchem Differenzierungs-

Format wird Adaptivität hergestellt?

- geschlossenes Format: Lehrkraft steuert Adaptivität
- offenes Format: Lernende steuern die Adaptivität mit

Auf welcher Differenzierungs-

Ebene wird geplant?

- Ebene der Aufgaben
- Ebene der Unterrichtsmethoden
- Ebene der Unterrichtsstrukturen

Differenzierungs-
Ziele

Differenzierungs-
Aspekte

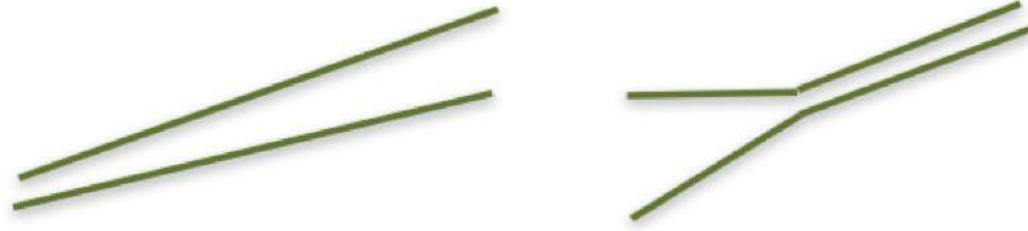
Differenzierungs-
Formate

Differenzierungs-
Ebenen



Differenzierungs-

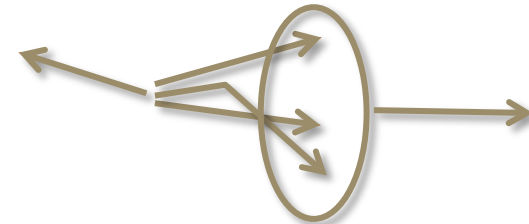
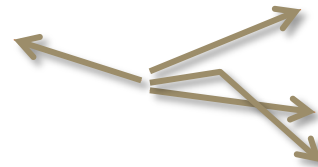
Z_{iel}



Differenzierungs-

A_{spekte}

Unterschieden gerecht werden / Unterschiede ausgleichen



Differenzierungs-

F_{ormate}

Vielfalt zulassen / Vielfalt fördern und nutzen

Differenzierungs-

E_{benen}



Differenzierungs-

Ziel

Differenzierungs-

Aspekte

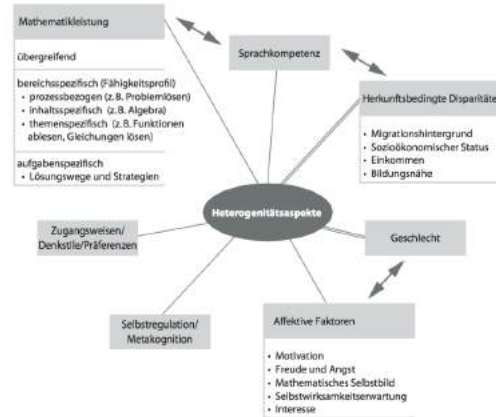
Differenzierungs-

Formate

Differenzierungs-

Ebenen

Heterogenitätsaspekte



Welche Unterschiede berücksichtigen?

- Anspruchsniveau
- Lerntempo
- Zugangsweisen
- Lernziele und -inhalte
- Sprachliche Anforderungen
- ...



Differenzierungs-

Ziel

„Offene“ und „geschlossene“
Differenzierungsformate:

Differenzierungs-

Aspekte

Wer hat die Verantwortung für die Wahl/
Passung des Lernangebotes?

Differenzierungs-

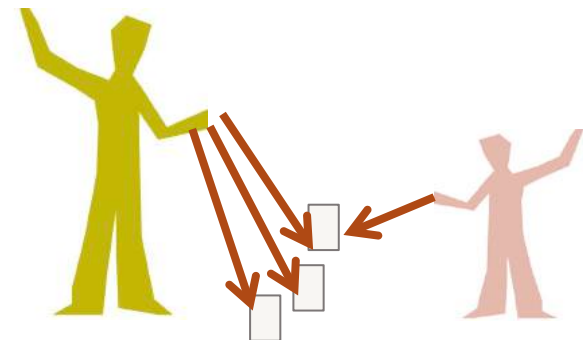
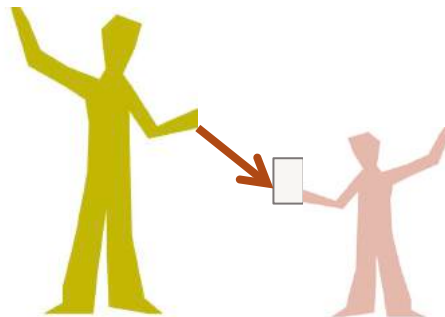
Formate

geschlossen

offen

Differenzierungs-

Ebenen





individualisierter Unterricht	differenzierter Unterricht	offener Unterricht	Selbst-organisierter Unterricht	adaptiver Unterricht	kooperativer Unterricht
einzelne Schüler	Gruppen	Schüler wählen (materialgel.)	Selbstorg. schrittweise erhöhen	variabel	Teams

(Bohl, 2014, 2017)



Differenzierungs-

Ziel

Differenzierungs-

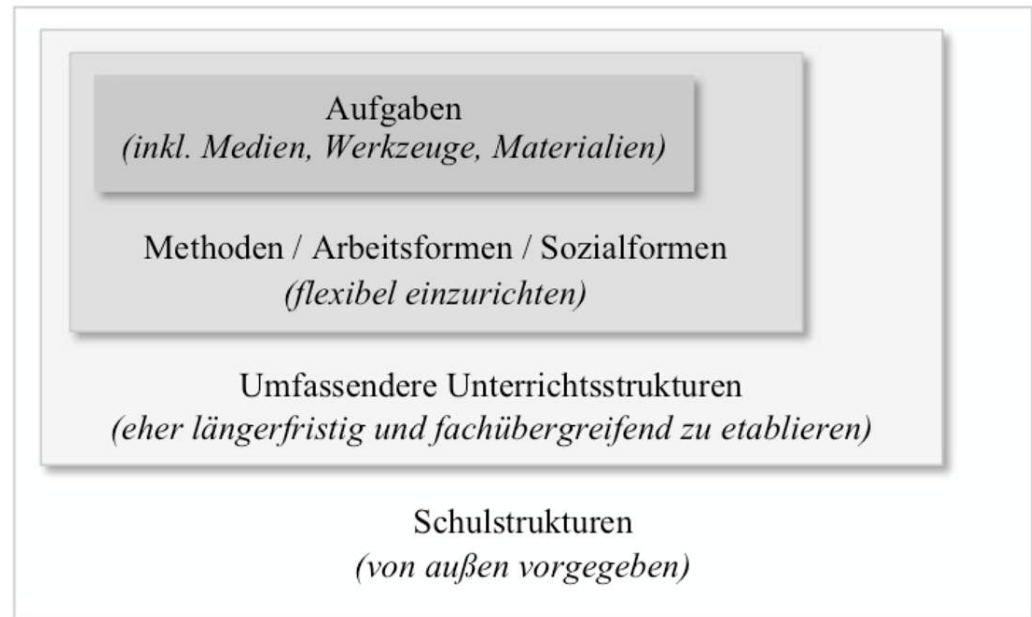
Aspekte

Differenzierungs-

Formate

Differenzierungs-

Ebenen





Fachspezifität



Aufgaben
(inkl. Medien, Werkzeuge, Materialien)

Methoden / Arbeitsformen / Sozialformen
(flexibel einzurichten)

Umfassendere Unterrichtsstrukturen
(eher längerfristig und fachübergreifend zu etablieren)

Schulstrukturen
(von außen vorgegeben)



Theoriebrille: „Aufgaben“

- Aufgaben aus Lehrwerken sammeln, vergleichen, aussuchen
- Aufgaben auf ihr Differenzierungspotenzial analysieren
- Umsetzungsmöglichkeiten ausloten
- Bearbeitungsprozesse antizipieren / analysieren
- Vorgefundene Aufgaben überarbeiten
- Neue Aufgaben konstruieren

Aber mit welchem Werkzeug?

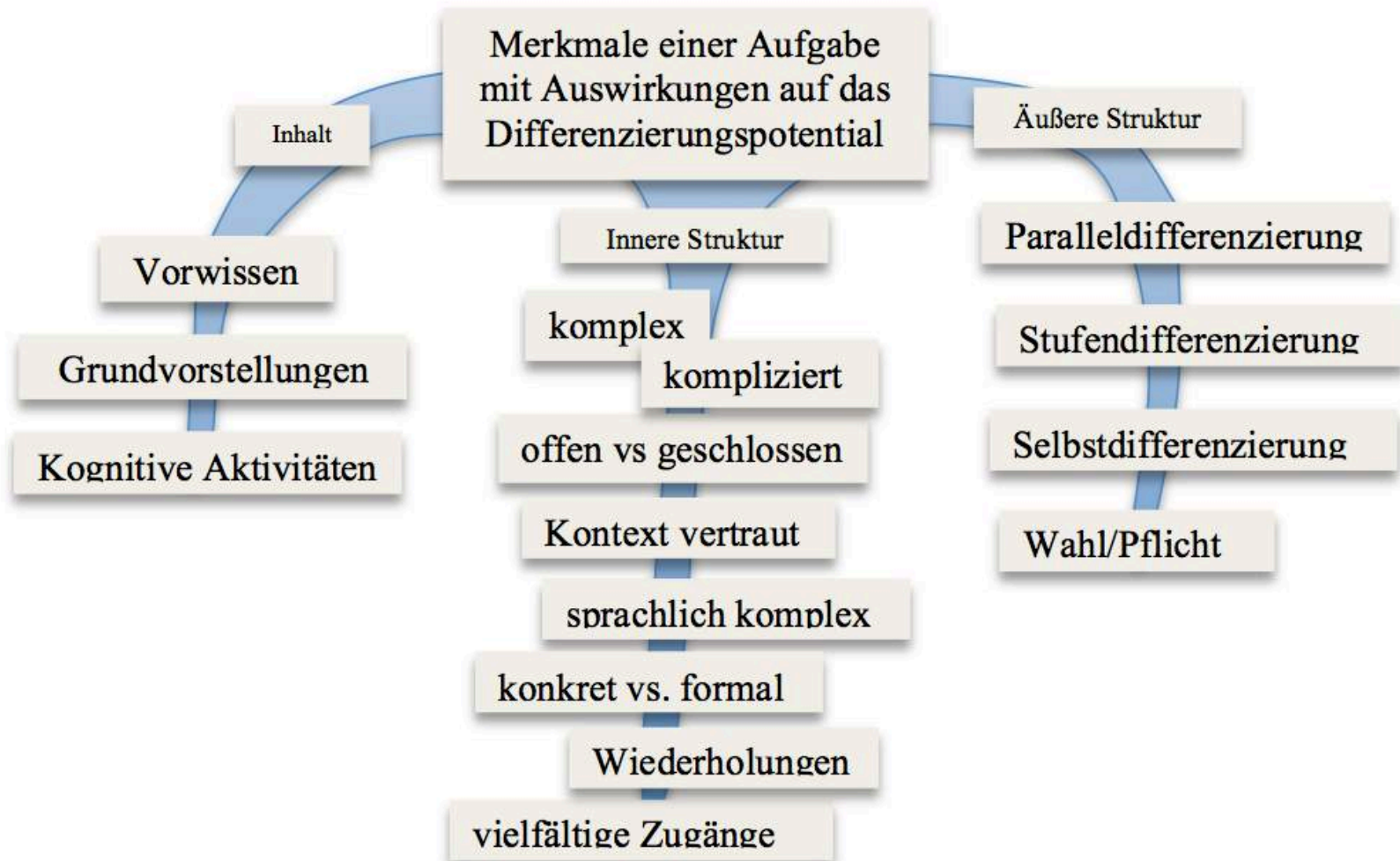
→ Theorie der Aufgabenmerkmale /

→ prinzipiengeleitete Konstruktion



Aufgabenmerkmale

Leuders & Prediger 2016; Leuders 2014; Büchter & Leuders 2007/2016





Grundvorstellungen

Grundvorstellungen aufbauen bis zur Klassenarbeit

- Hinzufügen von Visualisierungen
- Aufforderung zur Verbalisierung von Vorstellungen
- Aufforderung zur Darstellung durch eine Skizze

1) Umfang, Flächeninhalt oder Volumen?

a) Entscheide für die Situationen (1) bis (3), was man bestimmen muss: Umfang, Flächeninhalt oder Volumen? Begründe deine Entscheidung.

(1) Pia plant eine Wanderung um den Chiemsee.



(2) Ein Öltanker muss alle zehn Jahre ganz neu gestrichen werden.



(3) Merves Familie sucht eine große Ferienwohnung.



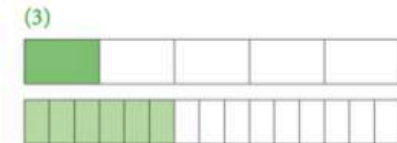
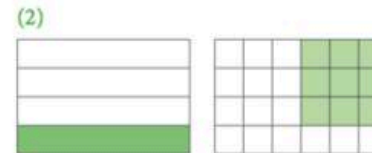
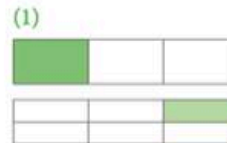
b) Bestimme für die Situation (1) bis (3) die gesuchte Größe ungefähr.

(Mathewerkstatt 5, Barzel et al. 2012,192)

Training

39 Anteile zusammenfassen

a) Addiere jeweils die beiden dargestellten Anteile. Nutze die feinere Einteilung, um die Ergebnisse zu bestimmen.



b) Zeichne eigene Bilder mit zwei Farben. Dein Nachbar soll die Additionsaufgaben ablesen und rechnen. Kontrolliert eure Ergebnisse an der Streifentafel.

c) Finde zu den Bildern aus a) auch Subtraktionsaufgaben und löse sie.

(Mathewerkstatt 6, Prediger, Barzel, Hußmann, Leuders 2013b, 72)



Kognitive Aktivitäten

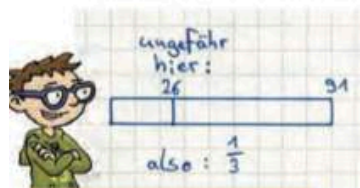
Problemlösen & Argumentieren für alle Lernenden!

Chancen für

- Beschreibung / Reflexion / Begründung?
- mehrere Wege?
- Ergebnis erklären?
- Variation der Aufgabe/
der Voraussetzungen?

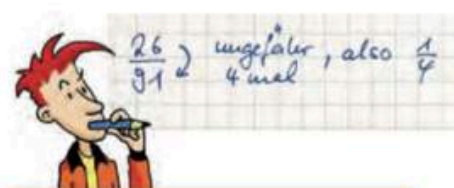
7 Brüche durch einfachere Brüche schätzen

- a) Markiere in der Streifentafel den Bruch $\frac{37}{100}$.
Finde einen einfacheren Bruch, der etwa so groß ist wie $\frac{37}{100}$.
- b) Pia, Ole und Till wollen $\frac{26}{91}$ durch einen einfachen Bruch schätzen.
Einen 91er-Streifen gibt es nicht in der Streifentafel. Deshalb suchen sie andere Wege:



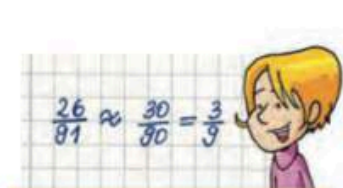
Mein Weg: Ich zeichne ein ungefähres Bild und suche einen passenden Bruch.

①



Mein Weg: Ich schaue, wie oft der Zähler ungefähr in den Nenner passt, dann nehme ich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, und so weiter als Schätzung.

②



Mein Weg: Ich runde auf Zehnerzahlen und überlege mir, dass z.B. $\frac{30}{70} = \frac{3}{7}$ genau so groß wie $\frac{5}{7}$ sein muss.

③

Hinweis

Manchmal passt einer der drei Wege nicht.

Schätze die folgenden Brüche durch einfachere Brüche. Probiere jedesmal alle Wege.

(1) $\frac{21}{61}$

(2) $\frac{42}{61}$

(3) $\frac{19}{81}$

(4) $\frac{330}{410}$

(5) $\frac{2103}{3267}$

(6) $\frac{410320}{529871}$

→ prozessbezogene Kompetenzen üben / produktives Üben



Kognitive Aktivitäten

Welche kognitiven Aktivitäten sind hier angeregt?

2 Lückenfüller

a) Übertrage die Rechnungen in dein Heft und ergänze die fehlenden Zahlen.

(1)

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 3 = \square \\ \cdot \\ 5 \cdot 7 = \square \\ = \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r} \square \cdot \square = 77 \\ \cdot \\ \square \cdot 5 = 10 \\ = \end{array}$$

(1)

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 15 = \square \\ \cdot \\ 15 \cdot 20 = \square \\ = \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r} \square \cdot 9 = 81 \\ \cdot \\ \square \cdot 11 = \square \\ = \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{r} \square \cdot 7 = 21 \\ \cdot \\ \square \cdot 11 = \square \\ = \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{r} \square \cdot \square = 21 \\ \cdot \\ \square \cdot \square = 26 \\ = \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{r} \square \cdot \square = 100 \\ \cdot \\ \square \cdot \square = \square \\ = \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{r} \square \cdot \square = 72 \\ \cdot \\ \square \cdot \square = 24 \\ = \end{array}$$

(Mathewerkstatt 6, Prediger et al. 2013b, 36)



Äußere Struktur

Paralleldifferenzierung

Stufendifferenzierung

Selbstdifferenzierung

Wahl/Pflicht

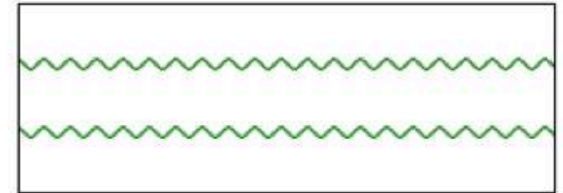
Paralleldifferenzierende

Aufgaben: Unterschiedliche, aber analoge Aufgaben



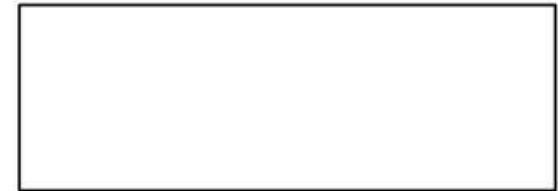
Stufendifferenzierende

Aufgaben: Teilaufgaben mit gestufter Schwierigkeit oder Offenheit



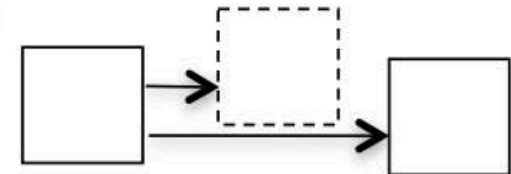
Selbstdifferenzierende

Aufgaben: Gemeinsames Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus



Aufgabengruppen mit Wahl und Pflicht:

Zuteilen/Auswählen verschiedener Lernwege, ggf. diagnosegeleitet





Nach welchem Differenzierungs-

Aspekt wird der Gleichschritt aufgelöst?

- Lerntempo
- Anspruchsniveau
- Lerninhalte und -ziele
- Sprachliche Anforderungen
- Zugangsweisen
- Neigung, Interessen
- Arbeitsweisen
- ...

→ Breites Spektrum an Optionen der Parallelisierung

Mögliche Merkmale bei paralleldifferenzierenden Aufgaben

Aufgabenspalte auf niedrigerem Anspruchsniveau

- auf weniger Vorwissen zurückgreifend
- Förderung einzelner Grundvorstellungen
- Muster erkennen und/oder beschreiben
- einschrittig, wenige Verknüpfungen
- eher geschlossen
- stärker angeleitet
- wenig Transfer, vertrauter Kontext
- sprachlich vereinfacht
- konkrete Beispiele / Veranschaulichungen
- mehrfache Wiederholungen

Aufgabenspalte auf höherem Anspruchsniveau

- Voraussetzung von umfassenderem Vorwissen
- Zurückgreifen auf mehrere Grundvorstellungen
- Muster verallgemeinern und/oder begründen
- mehrschrittig, mehrere Verknüpfungen
- eher offener Lösungsweg, über/unterbestimmte Aufgabe
- Transfer auf neue Kontexte
- höhere sprachliche Anforderungen
- auch formaler, ohne Bezug zu konkretem Beispiel
- wenige Wiederholungen



Innere Struktur

komplex

kompliziert

Paralldifferenzierung nach Kompliziertheit oder Komplexität?
Welche Heterogenität wird berücksichtigt? Welche nicht?

1 Achte auf die Klammern

$10 + (5 + 1)$

$10 + (5 - 1)$

$10 - (5 + 1)$

$10 - (5 - 1)$

2 Berechne mit und ohne Klammer

$12 - 5 + 3$

$34 - 12 - 7$

$12 - (5 + 3)$

$34 - (12 - 7)$

$33 + 7 - 4$

$49 + 21 + 5$

$33 + (7 - 4)$

$49 + (21 + 5)$

3 Hier kommen zwei Klammern vor

$25 - (12 + 11) + (10 - 5)$

$25 + (12 - 11) - (10 - 5)$

$25 - (12 - 11) + (10 - 5)$

$49 + (24 - 13) + 5 + (20 - 8)$

$49 - (24 - 13) - 5 - (20 - 8)$

$49 - (24 + 13) - 5 + (20 - 8)$

1* Berechne

$50 + (30 + 20)$

$8 + (5 + 2) + 1$

$50 + (30 - 20)$

$9 + (7 - 2) + 4$

$50 - (30 + 20)$

$20 - (5 + 2) + 3$

$50 - (30 - 20)$

$18 - (9 - 4) - 5$

2* Berechne

$88 + (55 - 33) - 11 + (22 - 3)$

$(88 + 55) - 33 - (11 + 22) - 3$

$88 - (55 + 33) + 11 + (22 - 3)$

$88 - (55 - 33) - 11 - (22 - 3)$

3* Durch unterschiedliche Klammern erhält der Rechenausdruck verschiedene Werte:

$150 - 50 + 35 - 25 + 12 - 5$

a) Setze die Klammer auf drei verschiedene Arten und rechne. Vergleiche die Ergebnisse

b) Wie viele Ergebnisse schafft ihr?



Konstruktion von gestuften Aufgaben, z.B.

Verständnissichernde Einstiegsaufgabe

Kernaufgabe für alle

Verständnisklärende Einstiegsaufgabe

Kernaufgabe für alle

Vertiefende Aufgabe für Stärkere/Schnellere

Geschlossene Bestimmungsaufgabe

Einfache Problemaufgabe
(z.B. Umkehrung)

Erhöhte Anforderungen
(z.B. Mehrschrittigkeit, Begründung)

Offene Problemstellung

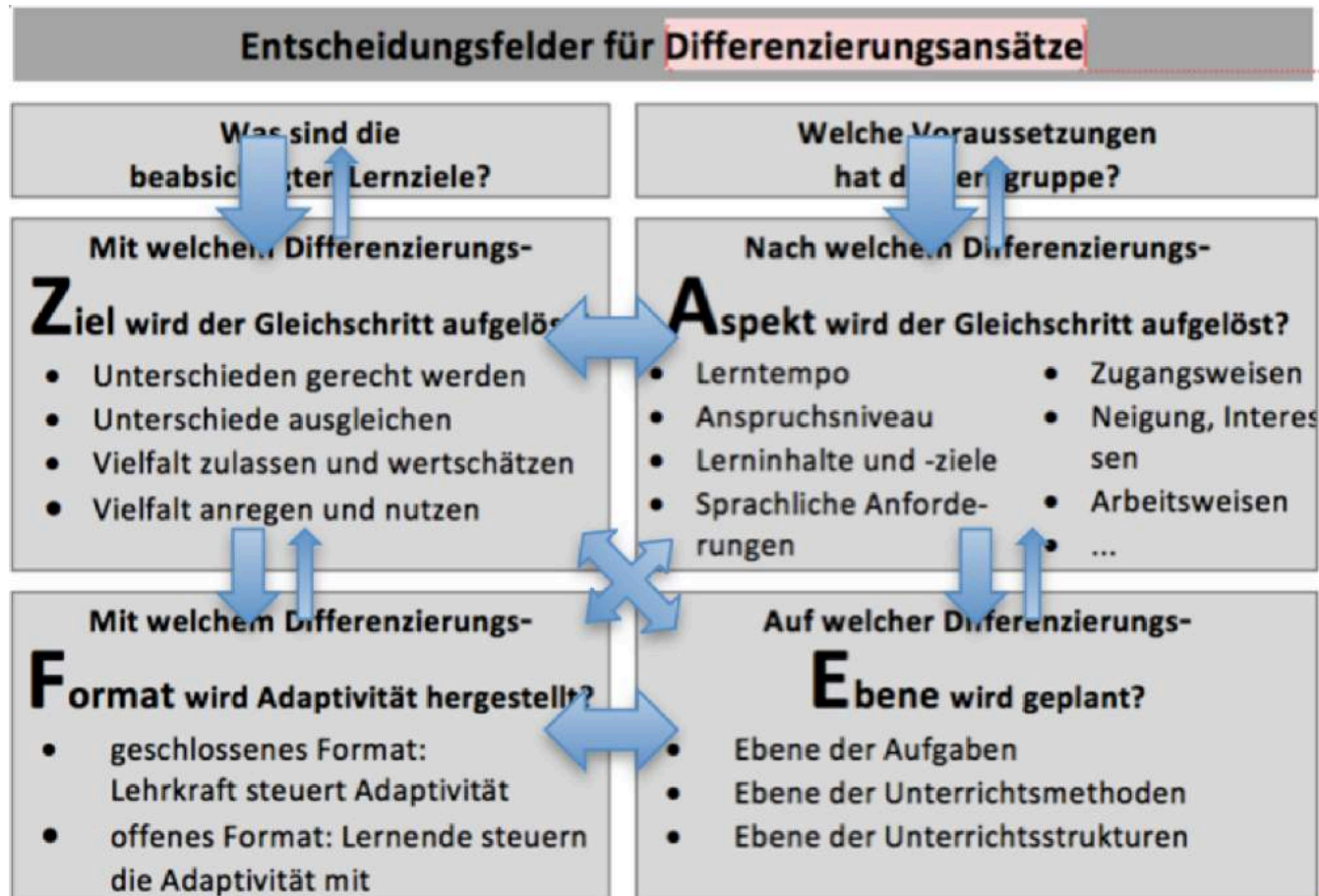
z.B. Blütenaufgaben, Bruder 2010

Methodische Fragen:

- Wer wählt aus?
- Wie wird Passung hergestellt?



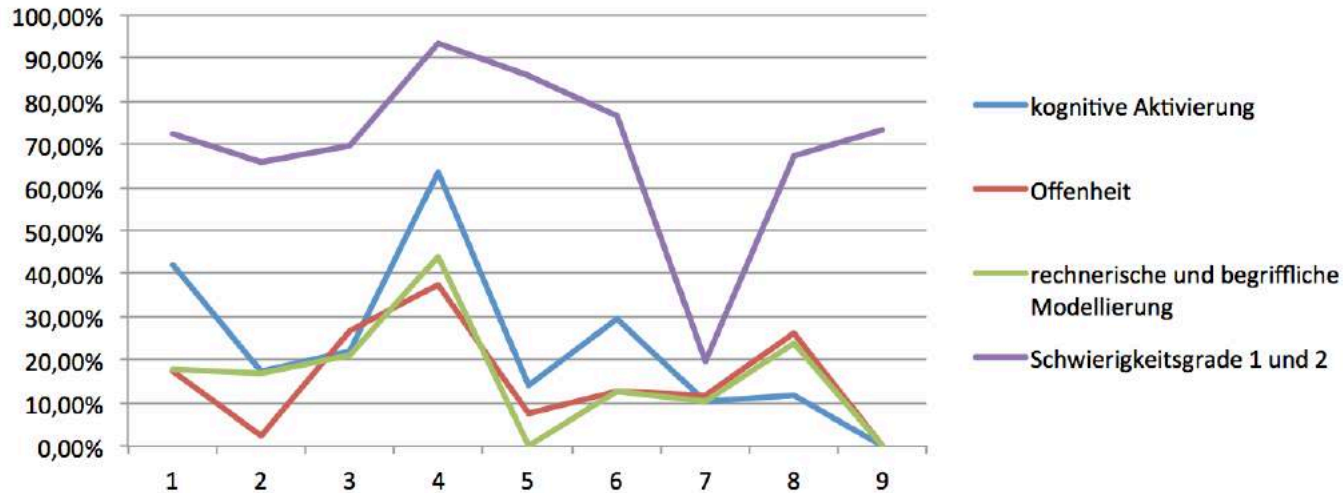
Rückblick: Entscheidungsfelder für das flexible Differenzieren





Befunde aus der Gemeinschaftsschul-Evaluation

Leuders & Föckler, in Bohl & Wacker (2016): Abschlussbericht WissGem



Aufgabe 1: Fehlersuche

Findest du den Fehler? Erkläre.

a)	$\frac{1}{6} + \frac{3}{5} = \frac{4}{11}$	b)	$\frac{3}{8} - \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$
c)	$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{1}{20}$	d)	$\frac{7}{8} + \frac{2}{3} = \frac{9}{24}$

Aufgabe 2: Käsekuchen

Vom Käsekuchen ist die Hälfte und von der Schwarzwälder Kirschtorte ein Drittel übriggeblieben.

- Zeichne die Anteile in die Kreisflächen ein und benenne den Rest mit einem Bruch.
- Überlege dir, wie du vorgegangen bist, damit du die unterschiedlich großen Teile zusammenzählen konntest.
- Warum war diese Aufgabe schwieriger als die erste Aufgabe mit der Pizza?



Gesamtblick auf den Unterricht

Viel hing von der Unterrichtsphase ab....

B. Differenzierungsaspekte A. Unterrichtsphasen		1. Stoffumfang/ Zeitaufwand	2. Komplexitätsgrad	3. Anzahl der notwendigen Durchgänge	4. Notwendigkeit direkter Hilfe/ Grad der Selbstständigkeit	5. Art der inhaltl. od. method. Zugänge/der Vorerfahrungen	6. Kooperationsfähigkeit
C. Aneignungs- bzw. Handlungsebenen a) konkrete Aneignungs- bzw. Handlungsebene b) explizit-sprachliche Aneignungs- bzw. Handlungsebene c) rein gedankliche Aneignungs- bzw. Handlungsebene	I. Aufgabenstellung - entwicklung						
	II. Erarbeitung						
	III. Festigung						
	IV. Anwendung/ Transfer						

Klafki & Stöcker (1985)



Unterrichtsphase	Mögliche didaktische Funktionen
Phase des Erarbeitens	• Anknüpfen an Vorerfahrungen • Erfinden und Entdecken • Erarbeiten
Phase des Systematisierens	• Austauschen und Integrieren • Systematisieren • Sichern
Phase des Übens und Wiederholens	• Vertiefen und Vernetzen • Automatisieren • Anwenden und Transfer • Wiederholen und Reaktivieren
Phase des Überprüfens	• Kompetenzerleben • Rückmeldungen über Leistungsstand • Leistungsbeurteilung

(Prediger et al. 2014 / Leuders & Prediger 2014)



Unterrichtsphase des Erarbeitens

Ansatz 1a

*An Vorerfahrungen
anknüpfen*

Ansatz 1b

*Eigenaktiv
erkunden*

Ansatz 1c

*Angeleitet
erarbeiten*

Ansatz 1d

*Individuell
nachvollziehen*

Unterrichtsphase des Erarbeitens

Ansatz 1a

*An Vorerfahrungen
anknüpfen*

Ansatz 1b

*Eigenaktiv
erkunden*

Ansatz 1c

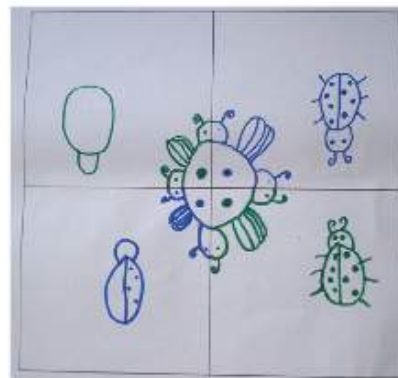
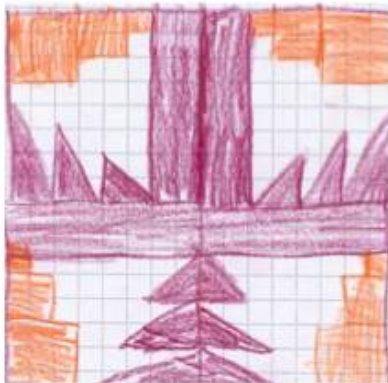
*Angeleitet
erarbeiten*

Ansatz 1d

*Individuell
nachvollziehen*



Anknüpfen und
Diagnostizieren mit
selbstdifferenzierenden,
produktiven Aufgaben



Vorerfahrungen
ausgleichen

Lernen am gleichen
Gegenstand



Unterrichtsphase des Erarbeitens

Ansatz 1a

*An Vorerfahrungen
anknüpfen*

Ansatz 1b

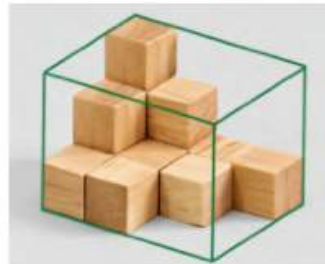
*Eigenaktiv
erkunden*

Ansatz 1c

*Angeleitet
erarbeiten*

Ansatz 1d

*Individuell
nachvollziehen*



Gestütztes entdeckendes Lernen
mit differenzierenden, ggf gestuften
Aufgaben

Lernen auf verschiedenen Wegen



Unterrichtsphase des Erarbeitens

Ansatz 1a

*An Vorerfahrungen
anknüpfen*

Ansatz 1b

*Eigenaktiv
erkunden*

Ansatz 1c

*Angeleitet
erarbeiten*

Ansatz 1d

*Individuell
nachvollziehen*

Teilbarkeit durch 3 und 9

Ist 1431 durch
9 teilbar?

Insgesamt Rest 9,
der ist durch 9 teilbar,
also auch 1431.

$$\begin{aligned} 10 : 9 &= 1 \text{ Rest } 1 \\ 100 : 9 &= 11 \text{ Rest } 1 \\ 1000 : 9 &= 111 \text{ Rest } 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20 : 9 &= 2 \text{ Rest } 2 \\ 200 : 9 &= 22 \text{ Rest } 2 \\ 2000 : 9 &= 222 \text{ Rest } 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30 : 9 &= 3 \text{ Rest } 3 \\ 300 : 9 &= 33 \text{ Rest } 3 \\ 3000 : 9 &= 333 \text{ Rest } 3 \end{aligned}$$

$$1431 : 9 = \underbrace{1000 : 9}_{\text{Rest 1}} + \underbrace{400 : 9}_{\text{Rest 4}} + \underbrace{30 : 9}_{\text{Rest 3}} + \underbrace{1 : 9}_{\text{Rest 1}}$$

Jetzt weiß ich, wie man
an den Ziffern erkennen
kann, ob eine Zahl durch
9 teilbar ist.

Maßstab 2 Baden-Württemberg, Schroeder et al. 2004, 110

- *Klassengespräch*
- *Lautes Denken*



Unterrichtsphase des Erarbeitens

Ansatz 1a

*An Vorerfahrungen
anknüpfen*

Ansatz 1b

*Eigenaktiv
erkunden*

Ansatz 1c

*Angeleitet
erarbeiten*

Ansatz 1d

*Individuell
nachvollziehen*

Mixed Representations

Let's look at representations of fractions to sort them!

Which of these representations show the same fractions? Drag and drop the representations into the slots next to the fraction they show.

1

3/5

5/6

3/4

Hint

The highlighted circle has three sections out of five shaded. Therefore, it shows 3/5.

← Buttons →

(Cognitive tutor, <https://mathtutor.web.cmu.edu/>)

- Lernen aus Lösungsbeispielen



Unterrichtsphase des Erarbeitens

Ansatz 1a

*An Vorerfahrungen
anknüpfen*

Ansatz 1b

*Eigenaktiv
erkunden*

Ansatz 1c

*Angeleitet
erarbeiten*

Ansatz 1d

*Individuell
nachvollziehen*

- Wie umfassend besteht die Chance, dass Lernende Vorerfahrungen einbringen können? (→ Ansatz 1a)
- Ist es ggf. vorab nötig, Unterschiede auszugleichen und gemeinsame Lernvoraussetzungen herzustellen (vorgeschaltetes Wiederholen → Ansätze 3a,b,c)
- Wie intensiv sollen Lernende gemeinsam an neuen mathematischen Situationen arbeiten? Möchte man die Vielfalt der Denkwege vielleicht sogar nutzen? (→ Ansatz 1b)
- Stehen Aufgaben zur Verfügung, an denen Lernende auf unterschiedlichem Niveau arbeiten können? (→ Ansatz 1b)
- Ist zu erwarten, dass die Lernziele auch bei der individuellen Bearbeitung von schriftlichem Material erreicht werden können? (→ Ansatz 1d)
- oder braucht es flexible Moderation und das Vorbild der Lehrperson (→ Ansätze 1b oder 1c oder eine Mischung)?
- Sollen Lernende zur Kommunikation und Argumentation angeregt werden? (→ Ansätze 1a und 1b berücksichtigen)
- Besteht eine Unterrichtsstruktur, die das individuelle Arbeiten unterstützt und aufrecht erhält? (→ Ansatz 1d)



Unterrichtsphase des Sammelns, Systematisierens und Sicherens

Ansatz 2a

**Lösungswege
austauschen**

Ansatz 2b

**Lösungswege
inszenieren**

Ansatz 2c

**Eigenaktiv
ordnen**

- Ist es wichtig, dass verschiedene Zugangsweisen berücksichtigt werden sollen, sprich dass Vielfalt genutzt wird? (→ Ansätze 2a oder 2b)
- Stehen Aufgaben zur Verfügung, die die Balance zwischen Konvergenz und Aktivität halten? (→ Ansatz 2c)
- Ist es wichtig, dass Lernende in der Gruppe einander zuhören und miteinander argumentieren? (→ Ansatz 2b, das ist zugleich Lernziel wie Lernvoraussetzung)

Unterrichtsphase Üben und Wiederholen

Ansatz 3a

**Diagnosegeleitet
üben oder wiederholen**

Ansatz 3b

**Produktiv
üben**

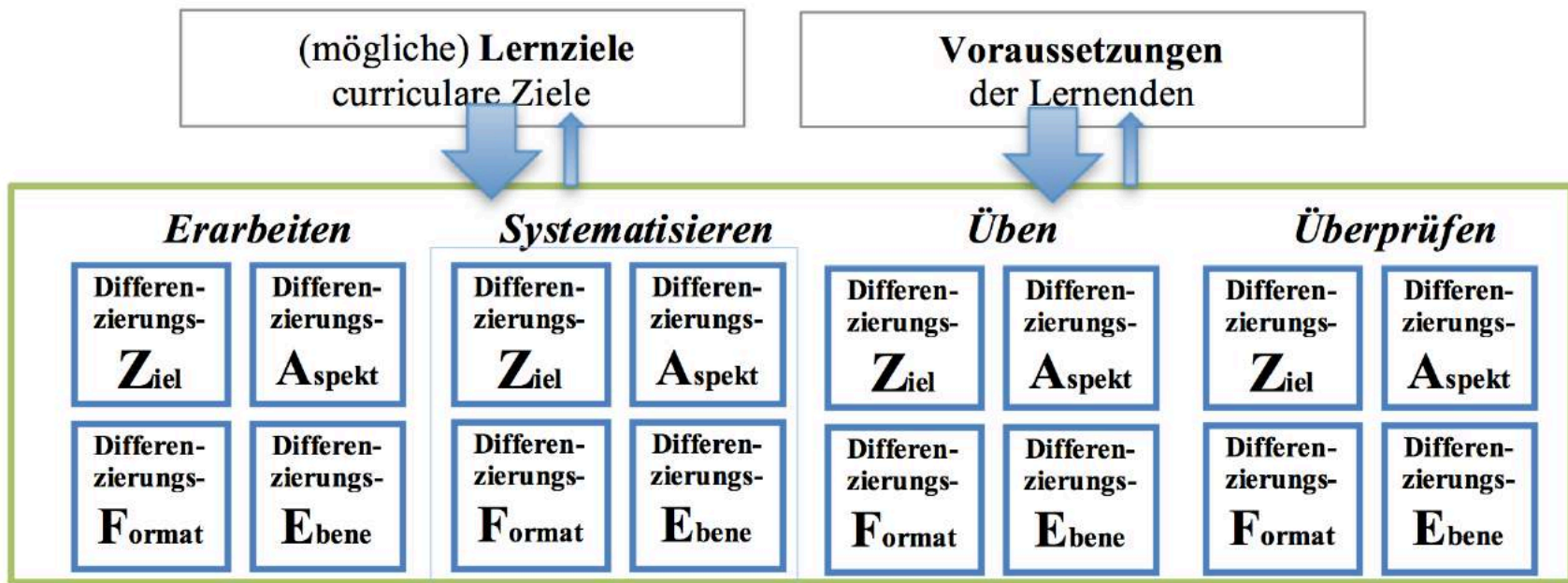
Ansatz 3c

**Angeleitet
wiedererarbeiten**

- Gibt es eine Gruppe und einen Aspekt, bei dem Unterschiede ausgeglichen werden müssen? (→ Ansatz 3c)
- Gibt es räumliche, personelle und zeitliche Ressourcen für eine Gruppenförderung? (→ Ansatz 3c)
- Besteht eine Unterrichtsstruktur, die das individuelle Arbeiten unterstützt und aufrecht erhält? (→ Ansatz 3a)

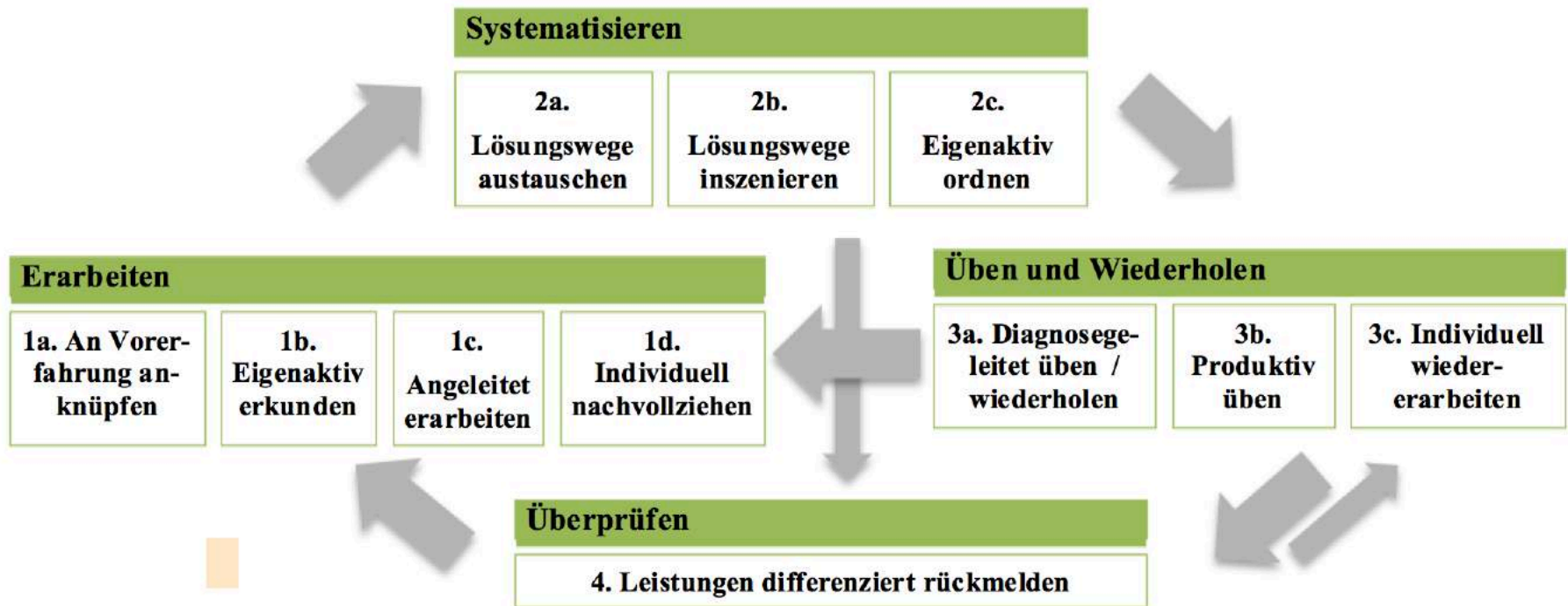


Prinzipiengeleitete Auswahl / Adaption / Entwicklung von differenzierenden Lerngelegenheiten



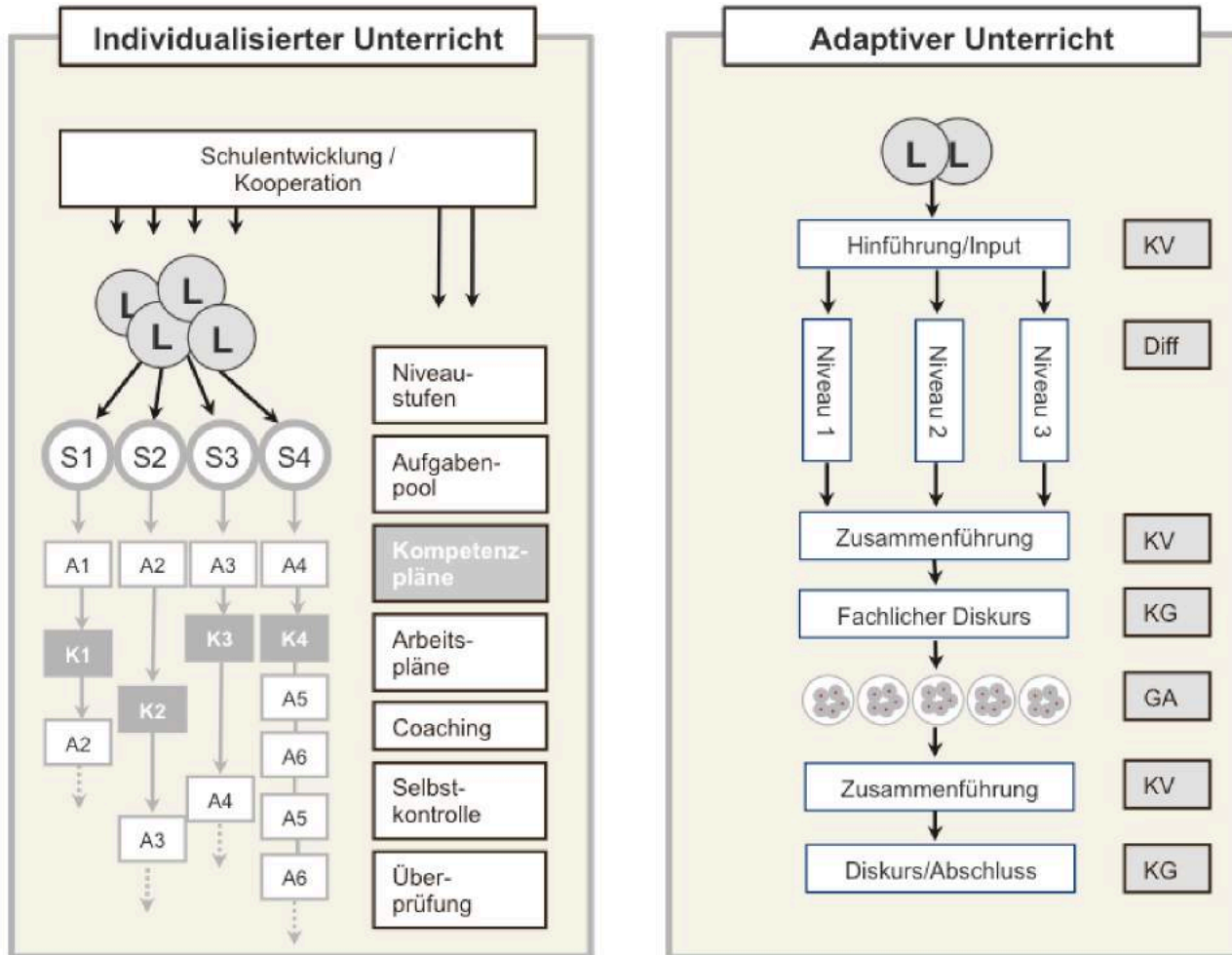


Prinzipiengeleitete Auswahl / Adaption / Entwicklung von differenzierenden Lerngelegenheiten





Individualisierter Unterricht und Adaptiver Unterricht





Gliederung

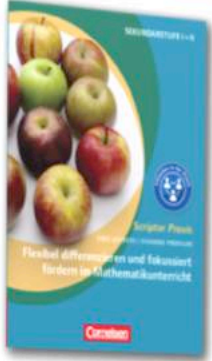
- **Forschungsstand:** Heterogenitätsaspekte
- **Fokussiert fördern:** ... und passende Differenzierungsformen („top down“)
- **Flexibel differenzieren:** Eine Theorie für die Praxis („bottom up“)
- **Erfahrungen aus der Fortbildung**



DZLM Deutsches Zentrum für
Lehrerbildung Mathematik

Flexibel differenzieren und fokussiert fördern

KOSIMA math.eXpert.bw



Differenzieren – viele Wege

Timo Leuders | IMBF
Susanne Prediger | IBM

Deutsche
Sonnen
Stiftung

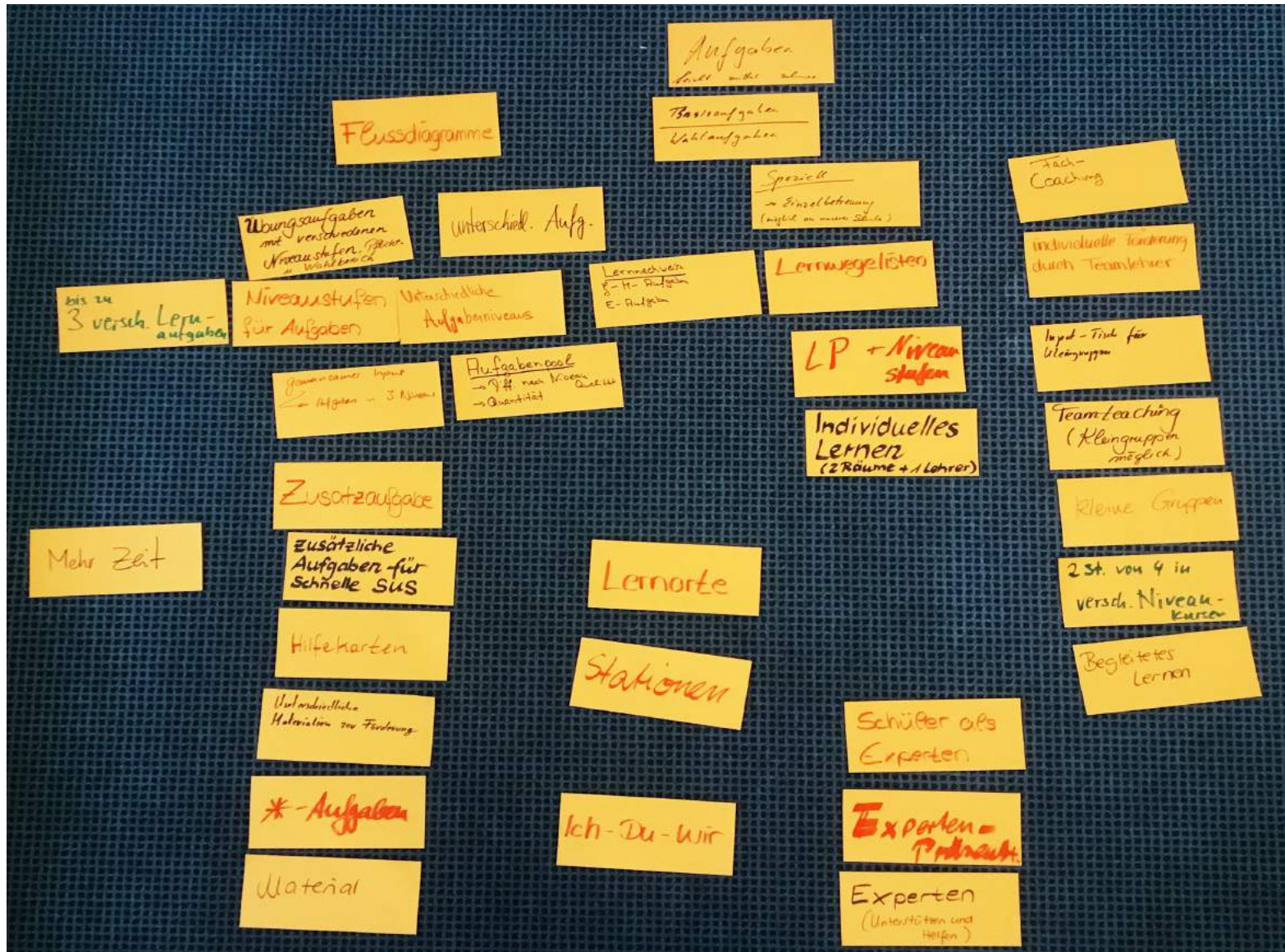
Deutsche
Sonnen
Stiftung



Wie differenzieren Sie?

„Bottom up:“

- Welche Strategien verfolgen wir schon?
 - Welche Chancen/Risiken nehmen wir war?
 - Welche weiteren Möglichkeiten gibt es?
 - Welche weiteren Elemente können wir nutzen?
- Dazu braucht es eine „Theoriebrille“



Leuders, Erens, Schmaltz (2017)



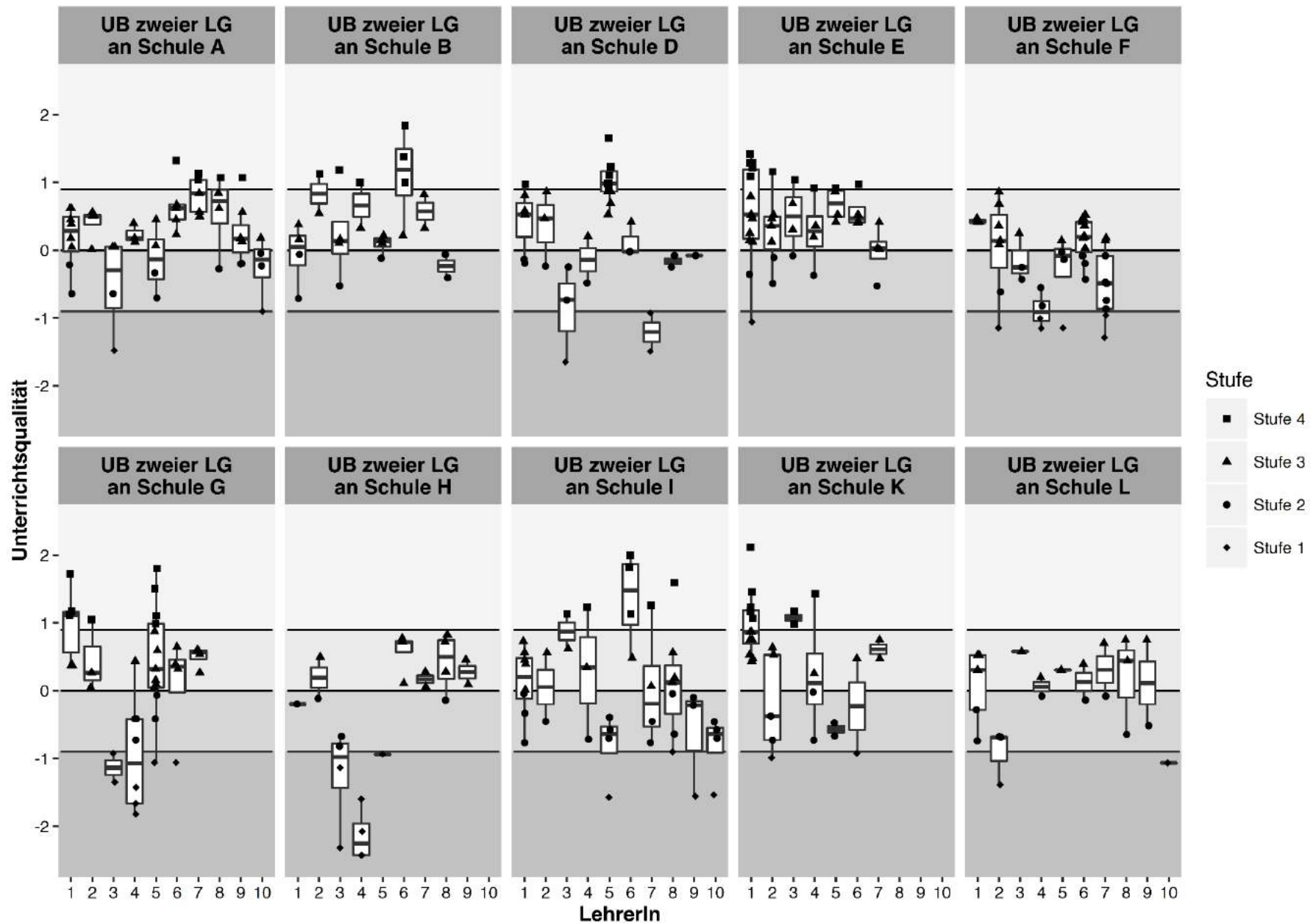
Flexibel Differenzieren statt individualisieren

- One size does not fit all
- Anspruchsvolle Aufgabe
- Es gibt Prinzipien / Theorien, die helfen
- Ohne Fachdidaktik geht es nicht
- Bereits an der Hochschule:
 - Handlungsoptionen kennenlernen
 - Kompetenzen erwerben











Lerngelegenheit B: Differenzierteren Blick und Flexibilität fördern

Vorlage: Lernmaterialen & Lernkonzepte

- Welche Chancen für das Differenzieren stecken im Material?
- Welche Elemente muss man erst hinzufügen?
- Welche Varianten des Differenzierens sind denkbar?
- Verschiedene Realisierung durch Adaptierung und Schwerpunktsetzung

Erkunden C**Wie kann ich die Größe eines Raumes bestimmen?****7 Platz für Fische**

Till und Ole haben im Zoo ein großes Aquarium gesehen.
Till möchte nun auch zu Hause Fische haben.
In einem Zooladen finden sie verschiedene Aquarien.

Schau mal, Ole.
Meinst du, dieses
Aquarium ist groß
genug? Es ist
80 cm lang und
60 cm hoch.



Es könnte sein,
dass dieses hier
etwas größer ist.
Es ist zwar nur
70 cm lang, dafür
ist es aber nicht
nur 40 cm, sondern
50 cm breit und
genauso hoch wie
dein Aquarium.

- a) Wie könnten Till und Ole klären, welches Aquarium größer ist?
Finde möglichst viele verschiedene Wege, die Aquarien zu vergleichen.
- b) Der Zoohändler sagt, ein kleiner Fisch von 1 cm Länge benötigt etwa einen Liter Wasser.
1 Liter ist der Rauminhalt eines Dezimeterwürfels (siehe Bild links).
Bastle einen Dezimeterwürfel aus Papier, damit du dir 1 Liter gut vorstellen kannst.



Finde verschiedene Gegenstände, die auch den Rauminhalt 1 Liter haben.

**Gut zu wissen**

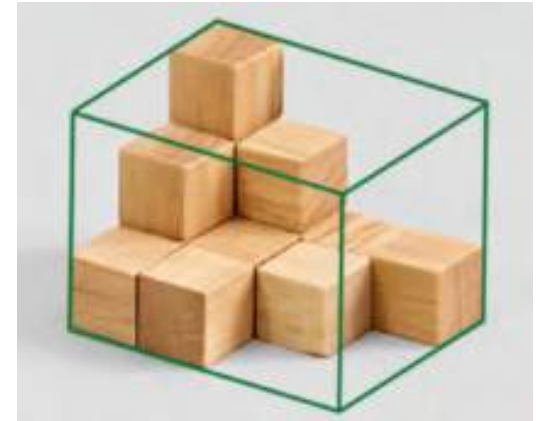
In einen Würfel mit
10 cm Kantenlänge
(Dezimeterwürfel)
passt genau 1 Liter.



Platy

- c) Till möchte in seinem Aquarium 4 Platys haben. Der Zoohändler sagt, die 4 Platys benötigen zusammen 24 Liter Wasser. Finde verschiedene Möglichkeiten für Länge, Breite und Höhe für ein passendes Aquarium.

Du kannst es mit Würfeln ausprobieren. Stelle dir dazu vor, dass jeder Würfel ein Dezimeterwürfel ist, also in jeden Würfel genau 1 Liter hineinpasst.



← nachgedacht

- d) Überprüfe nun, welches der beiden Aquarien im Zooladen größer ist. Bestimme deren Rauminhalt in Litern. Beschreibe, wie du vorgehst, wenn du den Rauminhalt eines Aquariums berechnest.

→ weitergedacht

Fisch	Länge	Platzbedarf
 Guppy	6 cm	2 Liter pro cm Fisch
 Platy	4 cm	1,5 Liter pro cm Fisch
 Barbe	7 cm	2 Liter pro cm Fisch

Man rechnet für jeden Zentimeter der Länge eines Fisches eine bestimmte Literanzahl.

- e) Till möchte neben den 4 Platys auch noch 6 Guppys und 8 Barben in seinem Aquarium haben. Der Zoohändler gibt ihm eine Tabelle mit Informationen zum Platzbedarf der Fische.

Welche Länge, Breite und Höhe könnte Tills Aquarium haben, damit es zum Platzbedarf seiner Fische passt?

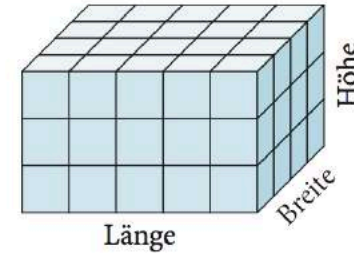


Ordnen C

Wie kann man die Größe eines Raumes bestimmen?

9 Rauminhalt eines Quaders berechnen

Ole hat aus vielen kleinen Würfeln einen Quader gebaut.
Er möchte nun wissen, wie viele Würfel er verbaut hat.



a) Erkläre Oles Rechnung.

$$4 \cdot 5 = 20$$

$$20 + 20 + 20 = 3 \cdot 20 = 60$$

b) Till vereinfacht die Rechnung. Erkläre seine Idee.

$$4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$$

* Neues Wort

Die Größe eines Raumes nennt man auch **Rauminhalt** oder **Volumen**.

c) Ergänze Tills Satz: „Wenn man Länge, Breite und Höhe eines Quaders kennt, dann berechnet man das *Volumen** so: ...“

 Training

29 Aquarium auffüllen

Mia hat ihr Aquarium gereinigt und möchte es nun wieder auffüllen. Sie benutzt dazu eine Gießkanne, in die zehn Liter Wasser hineinpassen.

 Problemlösen

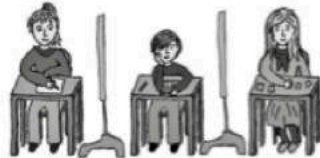
- a) Berechne das Volumen des Aquariums mit Hilfe der Maße im Bild.
- b) Wie viele volle Gießkannen muss Mia hineinschütten, damit ihr Aquarium gefüllt ist?
- c) Wie hoch steht das Wasser, wenn Mia nach 12 Gießkannen aufhört?



Wie kann fokussierte Förderung erfolgen?



... nicht nur Eins-zu-Eins-Betreuung...



...nicht nur methodisch individualisiertes Lernen...



...sondern auch in Kleingruppen und Klassenunterricht.

© A. Schink

Förderung entscheidet sich am Inhalt, nicht an der Sozialform, sondern am Inhalt.

→ Fokussierte Förderung bei

- **fehlenden Verstehensgrundlagen**
- affektiven oder genderbedingten Lernhürden
- **sprachlichen bedingten Hürden**
- spezifischem sonderpädagogischen Förderbedarf



Lerngelegenheit D: „Datengestützte Unterrichtsentwicklung“ (für eine Fortbildung)

- Interpretation externer diagnostischer Instrumente (Lernstand 5, VERA, ...)
- Vergleich von Fördermodellen / -materialien
- Organisatorisch Umsetzung im Kontext der eigenen Schule



Differenzieren heißt erst einmal nur...

„...jede Schülerin und jeden Schüler gemäß ihrem Lernstand und Lernendenprofil möglichst optimal zu fördern.“

zum Teil synonym: Individualisierung, Individuelle Förderung (ausgleichend), Adaptiver Unterricht